Fractions continues
TD n°3 : Droite projective complexe et homographies

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on définit l'homographie h_M associée à M sur $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par

$$h_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si} \quad z \in \mathbb{C},\ cz+d \neq 0. \\ \infty & \text{si} \quad z \in \mathbb{C},\ cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{si} \quad z = \infty \end{cases}$$

On obtient ainsi une action par homographies de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$

Exercice 1. [Comparaison entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et la sphère de Riemann]

Notons $\pi : \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la projection canonique.

(a) Donner un isomorphisme naturel entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) Comment interpréter l'action par homographies de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ via celui-ci ? En déduire qu'elle est au moins 2-transitive.

(c) Montrer qu'elle est en fait 3-transitive, et trouver son noyau.

(d) Montrer que $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un point fixe de l'homographie h_M si et seulement si $\pi^{-1}(z)$ est une droite propre de M.

(e) Montrer que si h_M n'est pas triviale, elle a un seul point fixe lorsque $\mathrm{tr}\, M = \pm 2$, et deux sinon.

(f) En déduire qu'une homographie est entièrement déterminée par la donnée de l'image de trois points de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Exercice 2. [Action d'homographies remarquables]

(a) Identifier les matrices M de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ telles que h_M fixe ∞. Comment agissent-elles sur $\mathbb{C}$?

(b) Parmi ces matrices, identifier celles qui agissent par rotation sur $\mathbb{C}$, et celles qui agissent par translation sur $\mathbb{C}$. Identifier le noyau de l'action.

(c) Montrer que les droites de $\mathbb{C}$ sont exactement les ensembles d'équation

$$bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$$

avec b complexe non nul et $c \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que les cercles de $\mathbb{C}$ sont exactement les ensembles d'équation

$$z\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$$

avec $|b|^2 > 4c$, c réel.

(e) Trouver M telle que $h_M(z) = 1/z$. Etudier l'image par cette homographie des :

1. droites de $\mathbb{C}$ ne passant pas par 0.
2. droites de $\mathbb{C}$ passant par 0.
3. cercles de $\mathbb{C}$ ne passant pas par 0.
4. cercles de $\mathbb{C}$ passant par 0.

(f) Montrer que les translations, rotations et $z \mapsto 1/z$ engendrent le groupe des homographies.

(g) En déduire que toute homographie envoie un cercle-droite sur un cercle-droite.

Exercice 3. [Projection stéréographique]

Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon $1/2$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, centrée en $(0,0,1/2)$. Son point le plus haut est noté $N=(0,0,1)$.

La projection stéréographique d'un point $P \neq N$ de $\mathbb{S}^2$ sur le plan de hauteur nulle de $\mathbb{R}^3$ est définie comme le point d'intersection de la droite (NP) avec ce plan. La projection stéréographique de N est définie comme $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$.

(a) Donner explicitement les formules de la projection stéréographique et de son inverse. En déduire un isomorphisme de la sphère de Riemann avec $\mathbb{S}^2$.

(b) Observer géométriquement quelles sont les images des cercles sur $\mathbb{S}^2$ (il y a trois cas possibles).

(c) On définit la distance cordale entre deux éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ comme la distance entre leurs antécédents par la projection stéréographique sur $\mathbb{S}^2$. Donner une formule pour cette distance.

(d) Montrer que $z \longmapsto 1/z$ est une isométrie pour la distance cordale.

Exercice 4. [Itérations d'une homographie]

Soit h_M une homographie non triviale.

(a) Montrer que h_M est conjuguée à $z \longmapsto z+1$ (si $\operatorname{tr} M = \pm 2$) et à $z \longmapsto \lambda z$ avec $\lambda = \operatorname{tr} M/2$ sinon.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_{n+1} = h_M(u_n)$, avec u_0 fixé.

(b) Montrer que si $\operatorname{tr} M = \pm 2$, cette suite converge vers l'unique point fixe de h_M quel que soit u_0.

(c) Montrer que si $\operatorname{tr} M \neq \pm 2$, on a plusieurs cas :

1. Si u_0 est un des points fixes de h, la suite est stationnaire.
2. Sinon, si les deux valeurs propres de M sont de modules distincts, la suite converge vers un des deux points fixes (indépendamment de u_0). ìtem Si les deux valeurs propres de M sont de même module, la suite est périodique si ce sont des racines de l'unité, sinon elle est dense dans un cercle-droite.

Exercice 5. [Fractions continues et homographies]

Pour toutes suites de nombres complexes $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note

$$K_n(a|b) = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{\cdots}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

(a) On note pour tout n, h_n l'homgraphie définie par $h_n(z) = a_n/(z+b_n)$. Écrire K_n en fonction de $h_1, \cdots, h_n$.

(b) Montrer que tout homographie envoyant ∞ sur 0 est de la forme $h(z) = a/(z+b)$. Montrer que toute homographie est soit de cette forme, soit la composée de deux homographies de cette forme.

Si $K_n(a|b)$ converge lorsque $n \to +\infty$, on note la limite $K(a|b)$.

(c) Avec le point de vue du (a), montrer que la convergence de la suite ne dépend pas de l'ajout à gauche d'un nombre fini de h_k.