ÉNS Lyon Algèbre
Agrégation 2014-2015

Séries formelles

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre.

Exercice 1. [Bases théoriques]

(a) L'anneau des séries formelles sur A, noté $A[[X]]$, est le A-module $A^{\mathbb{N}}$, pour lequel on emploie la notation

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

La loi de multiplication dans cet anneau est donnée par

$$\left(\sum_{m\geq 0} a_p X^p\right)\left(\sum_{q\geq 0} b_q X^q\right) = \sum_{n\geq 0}(\sum_{p+q=n} a_p b_q)X^n.$$

Montrer que $A[[X]]$ est un anneau commutatif unitaire pour cette loi.

(b) Une *famille sommable* de $A[[X]]$ est une famille de séries formelles $(F_i)i\in I$ où pour tout $i\in I$,

$$F_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(i)} X^n$$

telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble des $i\in I$ tels que $a_n^{(i)}$ est non nul est fini.

On définit alors $F=\sum_{i\in I} F_i$ comme étant la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ où $a_n = \sum_{i\in I} a_n^{(i)}$.

(c) Montrer que l'union de deux familles sommables est sommable ainsi que la multiplication par une famille sommable, et calculer les sommes correspondantes.

(d) Pour une série formelle non nulle $F=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$, la *valuation* (ou ordre) de F est l'entier $v(F) = \min\{n\in\mathbb{N}\,|\,a_n\neq 0\}$ (et $v(0)=+\infty$).

Montrer que pour tous $F,G\in A[[X]]$, $v(F+G)\geq \min(v(F),v(G))$ et $v(FG)=v(F)+v(G)$. En déduire que $A[[X]]$ est intègre.

Montrer qu'une famille $(F_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble des F_i tels que $v(F_i)\leq n$ est fini.

Exercice 2. [Composition et dérivation de séries formelles]

(e) Pour deux séries formelles $F=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et G telles que $v(G)\geq 1$, montrer que la somme $F\circ G = \sum_{n\geq 0} a_n G^n$ est bien définie, et calculer $v(F\circ G)$. On appelle cette somme la *composition* de F et G.

(b) En caractéristique nulle, pour $F=e^X-1 := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}X^n$ et $G=\ln(1+X) := \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}X^n$, montrer que $F\circ G = G\circ F = X$.

(c) Montrer que pour G de valuation au moins 1, l'application $F\mapsto F\circ G$ est un morphisme de A-algèbres.

(d) On note pour toute série formelle $F=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, $F' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}X^n$ la dérivée de F. Montrer que pour tous $F,G\in A[[X]]$, $(FG)' = F'G+FG'$ et $(F\circ G)' = G'F'\circ G$ si $v(G)\geq 1$.

Exercice 3. [Éléments inversibles de $A[[X]]$]

(a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est inversible dans $A[[X]]$ si et seulement si $a_0\in A^*$. Calculer $(1-X)^{-1}$, et montrer que X^3+3X+2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais pas dans $\mathbb{Z}[[X]]$.

(b) Si $A=K$ est un corps, en déduire que $K[[X]]$ est un anneau euclidien dont l'unique idéal maximal est l'idéal engendré par X.

Montrer également que $K[[X]]$ contient l'anneau des fractions rationnelles $F=P/Q\in K(X)$ avec $Q(0)\neq 0$. En particulier, développer en série formelle $(1-X)^{-n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 4. [Séries génératrices et dénombrement]

(a) Compter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $2x + 3y = n$.

(b) Calculer, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $S(n, k)$ le nombre de k-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut n.

(c) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de permutations sans points fixes de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$ et en déduire une formule pour D_n puis un équivalent quand n tend vers l'infini.

(d) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n le nombre d'arbres binaires à n noeuds. Montrer que $B_0 = 1$ et que $B_{n+1} = \sum_{p+q=n} B_p B_q$, en déduire que $B_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. [Sommes de Newton]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note $A = \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$S_k = X_1^k + \cdots + X_n^k \in A$$

et $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires, également dans A (pour $m > n$, on adoptera la convention $\Sigma_m = 0$).

(a) Exprimer $P(T) = \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i T) \in A[T]$ en fonction de $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$.

(b) Démontrer que dans $A[[T]]$:

$$-\frac{TP'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i T}{1 - X_i T} = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k T^k$$

(c) En déduire, pour tout $k \geq 1$, l'identité :

$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} S_1 = (-1)^{k-1} k \Sigma_k$$

(d) Démontrer que $S_k \in \mathbb{Z}[\Sigma_1, \cdots \Sigma_n]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, faire le calcul explicite pour S_1, S_2, S_3.

(e) Réciproquement, montrer que $\Sigma_k \in \mathbb{Q}[S_1, \cdots, S_n]$ pour tout k, et faire le calcul explicite pour Σ_1, Σ_2 et Σ_3.

Exercice 6. [Topologie ultramétrique]

(a) Montrer que l'application $d(F, G) = e^{-v(F,G)}$ définit une distance ultramétrique sur $K[[X]]$, c'est-à-dire que pour toutes séries formelles $F, G, H \in K[[X]]$,

$$d(F, H) \leq \max(d(F, G), d(G, H)).$$

Montrer que la somme, la composition et le produit sont continus pour cette métrique.

(b) Montrer que $K[[X]]$ muni de cette distance est complet, et qu'une série $\sum_{n \geq 0} F_n$ converge dans $K[[X]]$ si et seulement si $v(F_n) \to +\infty$.