HYPERSURFACES QUARTIQUES DE DIMENSION 3 : NON RATIONALITÉ STABLE

par

J.-L. Colliot-Thélène & A. Pirutka

Résumé. — Inspirés par un argument de C. Voisin, nous montrons l'existence d'hypersurfaces quartiques lisses dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ qui ne sont pas stablement rationnelles, plus précisément dont le groupe de Chow des zéro-cycles n'est pas universellement égal à $\mathbb{Z}$.

Резюме. — Существуют гладкие квартики $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$, которые не являются стабильно рациональными, а именно, группа Чжоу нуль циклов X не является универсально тривиальной. Доказательство основано на методе специализации, введённом К. Вуазан.

Introduction

Soit $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ une hypersurface quartique lisse. Dans [**7**], Iskovskikh et Manin montrent que tout automorphisme birationnel de X est un automorphisme, ce qui implique que le groupe des automorphismes birationnels est fini et que la variété de Fano X n'est pas rationnelle. Des choix convenables de X donnent alors des contrexemples au théorème de Lüroth pour les solides.

Cette méthode, dite de rigidité, a depuis été fort développée. Elle ne permet pas de répondre à la question de la rationalité stable de ces variétés, que l'on trouve posée explicitement dans des prépublications récentes ([**6**], [**9**]).

Artin et Mumford [**1**] construisirent d'autres exemples de solides $X/\mathbb{C}$ projectifs et lisses qui sont unirationnels mais non rationnels. L'invariant qu'ils utilisèrent est le sous-groupe de torsion $H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$ du troisème groupe de cohomologie de Betti $H^3(X, \mathbb{Z})$, isomorphe pour un solide projectif et lisse au groupe $H^4(X, \mathbb{Z})_{tors}$. Pour toute variété $X/\mathbb{C}$ projective et lisse unirationnelle, le groupe $H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$ est isomorphe à un autre invariant birationnel, le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$. Ce groupe est nul pour toute variété $X/\mathbb{C}$ stablement rationnelle, et même pour toute variété rétracte rationnelle. Leurs exemples ne sont donc pas stablement rationnels. La méthode ne peut s'appliquer directement aux variétés intersections complètes lisses de dimension au moins 3 dans un espace projectif $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, car le groupe de Brauer de telles variétés est nul.

Dans un récent article [**14**], C. Voisin a montré qu'un solide lisse revêtement double d'une surface quartique lisse très générale de $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ n'est pas stablement rationnel. Elle utilise une famille propre $f : X \to B$ de variétés, de base une courbe B lisse, d'espace total une variété lisse X, dont une fibre spéciale Y est un solide d'Artin-Mumford, de désingularisation $Z \to Y$. Par un argument de spécialisation, elle montre que si une fibre très générale admettait une décomposition de Chow de la diagonale, alors il en serait de même de toute fibre. Utilisant le fait que le solide Y n'a que des singularités quadratiques ordinaires, elle montre que cela impliquerait que la torsion du groupe $H^3(Z, \mathbb{Z})$, est nulle, ce qui d'après Artin et Mumford n'est pas le cas. Ceci implique qu'une fibre très générale de f n'est pas stablement rationnelle.

Dans le présent article, nous montrons qu'une hypersurface quartique très générale dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ n'est pas stablement rationnelle. Pour ce faire, nous relâchons les hypothèses dans la méthode de C. Voisin. D'une part nous autorisons l'espace total X à ne pas être lisse, d'autre part nous relâchons l'hypothèse sur le diviseur exceptionnel d'une résolution des singularités $Z \to Y$. Que l'on puisse un peu relâcher cette dernière hypothèse est déjà mentionné dans [**14**, Remarque 1.2].

Nous donnons deux versions de l'argument de spécialisation, l'un purement en termes de groupes de Chow des zéro-cycles (§1), l'autre, extension de [**14**], en termes de correspondances (§2).

Nous exhibons une hypersurface quartique singulière Y birationnelle à un solide d'Artin-Mumford, dont nous construisons une résolution des singularités $Z \to Y$. Nous avons relégué cette construction à l'appendice. Nous montrons que le diviseur exceptionnel remplit les conditions suffisantes dégagées aux paragraphes précédents pour faire fonctionner la méthode de spécialisation.

Le résultat de spécialisation de zéro-cycles (§1) montre qu'une déformation générique de cette hypersurface quartique Z n'est pas géométriquement stablement rationnelle, ni même rétracte rationnelle.

Le point de vue "groupe de Chow de zéro-cycles" (§1) établit l'existence d'hypersurfaces quartiques non stablement rationnelles définies sur une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(t)$, et montre que les paramètres de telles hypersurfaces sont denses pour la topologie de Zariski sur l'espace projectif paramétrant ces variétés. Le point de vue des correspondances (§2) établit la non rationalité stable pour les hypersurfaces quartiques "très générales" sur le corps des complexes.

Un exemple de quartique singulière Y dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ avec une résolution des singularités $Z \to Y$ satisfaisant les deux conditions : la torsion de $H^4(Z,\mathbb{Z})$ est non nulle, et le diviseur exceptionnel E satisfait les conditions suffisantes mentionnées ci-dessus, avait déjà été construit par J. Huh [**6**]. Pour l'exemple que nous construisons, point n'est besoin de calculer la torsion de $H^4(Z,\mathbb{Z})$: il suffit de renvoyer à l'article d'Artin et Mumford, ou au calcul birationnel du groupe de Brauer de Z [**3**, Exemple 2.5].

Dans tout l'article, k désigne un corps *de caractéristique zéro.*

Une k-variété est un k-schéma séparé de type fini. Une k-variété intègre est dite k-rationnelle si elle est k-birationnelle à un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Une k-variété intègre X est dite stablement k-rationnelle s'il existe des espaces projectifs $\mathbf{P}^n_k$ et $\mathbf{P}^m_k$ tels que $X \times_k \mathbf{P}^n_k$ est k-birationnel à $\mathbf{P}^m_k$. Une k-variété intègre X est dite rétracte rationnelle s'il existe des ouverts de Zariski non vides $U \subset X$ et $V \subset \mathbf{P}^m_k$ (m convenable), et des k-morphismes $f : U \to V$ et $g : V \to U$ tels que le composé $g \circ f$ est l'identité de U. Une k-variété intègre stablement k-rationnelle est rétracte rationnelle.

1. Groupe de Chow des zéro-cycles et spécialisations

Lemme 1.1. — *Soient X et Y deux k-variétés géométriquement intègres. S'il existe un corps L contenant k tel que l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

(i) X_L est L-birationnelle à Y_L,

(ii) X_L est L-rationnelle,

(iii) X_L est stablement L-rationnelle,

(iv) X_L est une L-variété rétracte rationnelle,

alors cette propriété vaut pour une extension L finie convenable de k.

Démonstration. — Montrons (i). On se ramène au cas k algébriquement clos et $L = k(Z)$ est le corps des fonctions d'une k-variété intègre. Les k-variétés $X \times_k Z$ et $Y \times_k Z$ sont birationnellement équivalentes par une équivalence qui respecte la projection sur Z. Il existe des ouverts non vides $U \subset X \times_k Z$ et $V \subset Y \times_k Z$ qui sont k-isomorphes. Il existe une extension finie F de k et un F-point de Z tel que les fibres au-dessus de ce point soient des ouverts non vides de X, resp. de Y, et qui soient isomorphes. Ceci établit l'énoncé dans le cas (i), lequel implique immédiatement l'énoncé dans les cas (ii) et (iii). La démonstration dans le cas (iv) est analogue. □

Définition 1.2. — On dit qu'un k-morphisme propre $f : X \to Y$ de k-variétés est CH_0-trivial si, pour tout corps F contenant k, l'application induite $f_* : CH_0(X_F) \to CH_0(Y_F)$ sur les groupes de Chow de zéro-cycles est un isomorphisme.

Dans le cas particulier du morphisme structural d'une k-variété, on a la définition suivante.

Définition 1.3. — On dit qu'une k-variété propre X est CH_0-triviale si son groupe de Chow de degré zéro est universellement égal à $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si, pour tout corps F contenant k, l'application degré $deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Exemple 1.4. — Soit Y une courbe intègre, non nécessairement lisse, sur un corps k algébriquement clos. Si Y est rationnelle, i.e. de genre géométrique zéro, alors elle est CH_0-triviale.

Lemme 1.5. — *Soit X une k-variété intègre projective et lisse. Si la k-variété X est rétracte rationnelle, c'est une k-variété CH_0-triviale.*

Démonstration. — L'hypothèse étant invariante par changement de base de k à un surcorps F, il suffit de montrer que la flèche $deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Par définition, il existe des ouverts de Zariski non vides $U \subset X$ et $V \subset \mathbf{P}^m_k$, et des k-morphismes $f : U \to V$ et $g : V \to U$ tels que le composé $g \circ f$ est l'identité de U. En utilisant la résolution des singularités, on voit qu'on peut étendre f et g en des k-morphismes de k-variétés projectives et lisses $f' : X' \to Y$ et $g' : Y \to X$, avec $U \subset X'$ et $V \subset Y$, et en particulier $g' \circ f'$ un k-morphisme birationnel. Par fonctorialité covariante des groupes de Chow, on obtient des homomorphismes $CH_0(X') \to CH_0(Y) \to CH_0(X)$. Ces homomorphismes sont compatibles à l'application degré. L'invariance birationnelle des groupes de Chow des zéro-cycles (cf. [**5**, Ex. 16.1.11]) assure que l'homomorphisme composé est un isomorphisme. L'invariance birationnelle montre par ailleurs que le degré induit un isomorphisme $CH_0(Y) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$. L'homomorphisme $deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est donc un isomorphisme. □

Remarque 1.6. — A. S. Merkurjev nous fait remarquer que le lemme 1.5 est connu et vaut sans restriction sur la caractéristique de k. C'est une conséquence du fait, dû à M. Rost, que CH_0 s'étend à la catégorie des correspondances rationnelles. La démonstration [**8**, Appendix RC] n'utilise pas la résolution des singularités.

Proposition 1.7. — *Soit $f : Z \to Y$ un k-morphisme propre de k-variétés algébriques. Les hypothèses suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout point M du schéma Y, de corps résiduel $\kappa(M)$, la fibre Z_M est une $\kappa(M)$-variété CH_0-triviale.

(ii) Pour tout corps F contenant k et tout point $M \in Y(F)$, la fibre Z_M est une F-variété CH_0-triviale.

Elles impliquent que le k-morphisme f est CH_0-trivial.

Démonstration. — L'équivalence des deux hypothèses est immédiate. Pour établir l'énoncé, il suffit de montrer que pour $F = k$, la flèche $f_* : CH_0(Z) \to CH_0(Y)$ est un isomorphisme. L'hypothèse assure immédiatement que la flèche $f_* : CH_0(Z) \to CH_0(Y)$ est surjective. Soit z un zéro-cycle sur Z. Si $f_*(z)$ est rationnellement équivalent à zéro sur Y, alors il existe des courbes fermées intègres $C_i \subset Y$ et des fonctions rationnelles $g_i \in k(C_i)$ telles que $f_*(z) = \sum_i div_{C_i}(g_i)$. En appliquant l'hypothèse au corps des fonctions de la courbe C_i, on trouve des courbes fermées intègres $D_i^j \subset Z$ en nombre fini telles que f induise des morphismes finis surjectifs $f_i^j : D_i^j \to C_i$ tels que, pour chaque i, on ait une égalité $\sum_j n_i^j deg(f_i^j) = 1$, avec les $n_i^j \in \mathbb{Z}$. On note encore g_i la fonction rationnelle sur D_i^j image réciproque par f_i^j de la fonction rationnelle g_i sur C_i. Le zéro-cycle $z' := z - \sum_i [\sum_j n_i^j div_{D_i^j}(g_i)]$ sur Z satisfait $f_*(z') = 0$ comme zéro-cycle sur Y. Il existe donc des points fermés Q_j de Y en nombre fini tels que le zéro-cycle z' soit sur Z somme de zéro-cycles z_j, chaque z_j étant supporté sur la fibre $Z_{Q_j} = f^{-1}(Q_j)$. L'hypothèse assure que chacun des z_j est rationnellement équivalent à zéro sur Z_{Q_j}, donc sur Z. Ainsi z est rationnellement équivalent à zéro sur X. La flèche $f_* : CH_0(Z) \to CH_0(Y)$ est donc injective. □

Exemple 1.8. — Soient k un corps algébriquement clos, Y une k-courbe projective intègre de genre géométrique zéro, et $f : X \to Y$ un morphisme de k-variétés propres intègres, de fibre générique une conique lisse. Le k-morphisme f est CH_0-trivial et X est une k-surface CH_0-triviale.

Proposition 1.9. — *Soit $f : Z \to Y$ un k-morphisme propre birationnel de k-variétés algébriques projectives géométriquement intègres. Supposons :*

(i) La k-variété Z est lisse et possède un zéro-cycle de degré 1.

(ii) Le k-morphisme f est CH_0-trivial.

(iii) Il existe un ouvert non vide $U \subset Y$ lisse sur k, d'image réciproque $V = f^{-1}(U) \subset Z$ tel que $f : V \to U$ soit un isomorphisme, et tel que pour tout corps F contenant k, tout zéro-cycle de degré zéro sur U_F a une image nulle dans $CH_0(Y_F)$.

Alors la k-variété Z est CH_0-triviale.

Démonstration. — Les hypothèses étant invariantes par changement de corps $k \subset F$, il suffit d'établir que sous les hypothèses ci-dessus la flèche $deg_k : CH_0(Z) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. D'après (i), la flèche est surjective. Un lemme de déplacement facile et classique assure que tout zéro-cycle de degré zéro sur la k-variété lisse Z est rationnellement équivalent sur Z à un zéro-cycle de degré zéro dont le support est dans V. D'après (iii), l'image du cycle $f_*(z)$ dans $CH_0(Y)$ est nulle. L'hypothèse (ii) assure que $f_* : CH_0(Z) \to CH_0(Y)$

est un isomorphisme. Comme cet isomorphisme respecte le degré, on conclut que la flèche $deg_k : CH_0(Z) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. □

Proposition 1.10. — *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma propre et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale.*

(i) On a une application naturelle de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$; elle est compatible avec les applications degré à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

(ii) Si A est hensélien, et si la flèche $deg_K : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, alors tout zéro-cycle de Y à support dans le lieu lisse Y_{lisse} de Y et de degré zéro a une image nulle dans $CH_0(Y)$.

(iii) Si A est hensélien et X/K géométriquement intègre, de désingularisation $\tilde{X}$, et si la flèche $deg_K : CH_0(\tilde{X}) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, alors tout zéro-cycle de Y à support dans le lieu lisse Y_{lisse} de Y et de degré zéro a une image nulle dans $CH_0(Y)$.

Démonstration. — L'énoncé (i) est un cas particulier de la construction d'homomorphismes de spécialisation (Fulton [**5**, §20.3]). L'énoncé (ii) résulte de l'énoncé (i).

Montrons (iii). Soit $X_{lisse} \subset X$ l'ouvert de lissité. Compte tenu de l'invariance birationnelle du groupe de Chow des zéro-cycles pour les variétés projectives et lisses, on peut supposer que la résolution des singularités $\tilde{X} \to X$ induit un isomorphisme au-dessus de X_{lisse}. Par Hensel, un zéro-cycle z de degré zéro sur Y_{lisse} se relève en un zéro-cycle z_1 de degré zéro sur X_{lisse}, lequel est l'image d'un zéro-cycle de degré zéro z_2 sur $\tilde{X}$. L'application composée $CH_0(\tilde{X}) \to CH_0(X) \to CH_0(Y)$ envoie z_2 sur z. Or, par hypothèse, $z_2 = 0 \in CH_0(\tilde{X})$. □

Remarque 1.11. — Dans la situation qui nous intéresse, à savoir le cas où A est un anneau local d'une courbe lisse sur un corps, outre [**5**, §20.3] qui passe par [**5**, Theorem 6.3] et donc la déformation au cône normal [**5**, §5], des constructions antérieures de l'homomorphisme de Gysin pour l'inclusion du diviseur principal $Y \subset \mathcal{X}$, donnant naissance aux homomorphismes de spécialisation $CH_r(X) \to CH_r(Y)$, sont disponibles. On consultera [**4**, §4] et [**5**, §2.3].

On renvoie à [**12**] pour la théorie des modules de cycles de Rost (voir aussi les rappels dans [**11**] et [**2**]). Rappelons que les groupes de cohomologie étale $H^i(\bullet, \mu_n^{\otimes j})$ définissent une théorie des modules de cycles sur les k-variétés, et que pour Y une k-variété projective intègre de désingularisation $Z \to Y$, le groupe de cohomologie non ramifiée $H^2_{nr}(k(Y)/k, \mu_n)$ s'identifie au sous-groupe de n-torsion du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(Z)$.

Théorème 1.12. — *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k algébriquement clos. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma fidèlement plat et propre sur A. Supposons :*

(i) La fibre générique $X = \mathcal{X} \times_A K$ est une K-variété géométriquement intègre qui, sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, est rétracte rationnelle.

(ii) La fibre spéciale $Y = \mathcal{X} \times_A k$ est intègre, et possède une désingularisation $f : Z \to Y$ telle que le morphisme f est CH_0-trivial.

Alors

(a) La k-variété Z est CH_0-triviale.

(b) Pour tout module de cycles M^i sur le corps k, pour tout corps L contenant k, et tout $i \geq 0$, la flèche $M^i(L) \to M^i_{nr}(L(Z)/L)$ est un isomorphisme.

(c) Pour tout corps L contenant k, la flèche naturelle $\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}(Z_L)$ *est un isomorphisme.*

(d) $\mathrm{Br}(Z) = 0$.

Démonstration. — On peut supposer $A = k[[t]]$. Il existe une extension finie L/K telle que la L-variété X_L soit rétracte rationnelle. La clôture intégrale de A dans K_1 est un anneau de valuation discrète complet A_1, qui a comme corps résiduel k. Pour établir le théorème, on peut donc supposer $A = k[[t]]$ et que la K-variété X est rétracte rationnelle. Ces propriétés sont respectées si l'on remplace k par un corps F quelconque contenant k et A par $F[[t]]$.

L'hypothèse (i) et le lemme 1.5 impliquent alors que toute désingularisation $\tilde{X}$ de X est CH_0-triviale. L'énoncé (a) résulte alors des propositions 1.9 et 1.10 (iii). L'énoncé (b) est une conséquence de (a) ([**11**, Thm. 2.11], cf. [**2**, Thm. 1.4]). Les énoncés (c) et (d) sont alors des conséquences immédiates. □

Lemme 1.13. — *Soit X une k-variété propre géométriquement intègre de dimension n, possédant un zéro-cycle z_0 de degré 1 dont le support est dans le lieu lisse de X. Soit K le corps des fonctions rationnelles de X.*

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La flèche $deg_K : CH_0(X_K) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

(ii) Il existe une sous-variété fermée $D \subset X$ de codimension 1 et un cycle $Z \in Z_n(X \times X)$ supporté dans $D \times X$ tel que le cycle

$$\Delta_X - Z - X \times z_0 \in Z_n(X \times X)$$

ait une classe nulle dans $CH_n(X \times X)$.

(b) Si ces conditions sont satisfaites, alors tout zéro-cycle de degré 0 à support dans le lieu lisse de X est rationnellement équivalent à zéro sur X, et la propriété (ii) vaut en y remplaçant z_0 par tout autre zéro-cycle de degré 1 à support lisse.

(c) Si de plus la k-variété X est lisse, alors elle est CH_0-triviale.

(d) Si une désingularisation $\tilde{X} \to X$ admet une décomposition de Chow de la diagonale, alors il en est de même de X.

Démonstration. — Pour (c), voir [**2**, Lemma 1.3]). L'énoncé (d) s'obtient par poussette $CH_n(\tilde{X} \times_k \tilde{X}) \to CH_n(X \times_k X)$. □

Dans la situation du point (ii) du lemme, on dit que l'on a *une décomposition de Chow de la diagonale de la k-variété X* (cf. [**14**]).

Remarque 1.14. — Si k est algébriquement clos, tout point rationnel est rationnellement équivalent à un zéro-cycle de degré 1 supporté dans le lieu lisse, et les conditions du lemme impliquent $CH_0(X) = \mathbb{Z}$.

Le lemme 1.13 nous permet de généraliser le théorème 1.12.

Théorème 1.15. — *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k algébriquement clos. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma propre et plat à fibres géométriquement intègres. Soit $\tilde{X} \to X$ une désingularisation de $X = \mathcal{X} \times_A K$.*

Supposons que la fibre spéciale $Y = \mathcal{X} \times_A k$ possède une désingularisation $f : Z \to Y$ telle que le morphisme f est CH_0-trivial.

Supposons qu'il existe un zéro-cycle relatif σ dans $\mathcal{X}$, de degré 1, de support contenu dans le lieu de lissité de $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\ A$.

(i) Si X admet une décomposition de Chow de la diagonale, alors Y admet une décomposition de Chow de la diagonale.

(ii) Si $\tilde{X}$ est une K-variété CH_0-triviale, alors Z est une k-variété CH_0-triviale.

(iii) Si la fibre générique géométrique $X \times_K \overline{K}$ admet une décomposition de Chow de la diagonale, alors Y admet une décomposition de Chow de la diagonale.

(iv) Si $\tilde{X} \times_K \overline{K}$ est CH_0-triviale, alors la k-variété Z est CH_0-triviale.

Démonstration. — On peut supposer $A = k[[t]]$. Notons n la dimension de X.

Démontrons (i). Soient, sur le corps K, Z, D et $z_0 = \sigma(K)$ comme dans le lemme 1.13. Soit $Z = \sum n_i Z_i$ avec $Z_i \subset D \times X$ irréductibles. On peut étendre Z_i et D en des schémas $\mathcal{Z}_i$ et $\mathcal{D}$, propres et plats au-dessus de A, avec $\mathcal{Z}_i \subset \mathcal{D} \times_A \mathcal{X}$ pour tout i. Soit $\mathcal{Z}_{i,k}$ la fibre spéciale de $\mathcal{Z}_i$, soit $Z_k = \sum_i n_i Z_{i,k}$ et soit $\Delta_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X} \times_A \mathcal{X}$ la diagonale relative. D'après l'hypothèse, le cycle $\xi := [\Delta_X] - Z - [X \times \sigma(K)]$ est rationnellement équivalent à zéro dans $CH_n(X \times X)$. En utilisant [**5**, Section 20.3], on obtient que la spécialisation $\overline{\xi} = [\Delta_Y] - \mathcal{Z}_k - [Y \times \sigma(k)] \in CH_n(Y \times_k Y)$ est rationnellement équivalente à zéro.

Le lemme 1.13 appliqué à la K-variété lisse $\tilde{X}$ montre que l'hypothèse de (ii) implique l'existence d'une décomposition de Chow de la diagonale de $\tilde{X}$, donc de X par le lemme 1.13 (d).

D'après (i) et le lemme 1.13 (b) appliqué à Y, tout zéro-cycle de degré zéro à support dans Y_{lisse} a son image nulle dans $CH_0(Y)$. L'énoncé (ii) résulte alors de la proposition 1.9.

On établit (iii) en passant à une extension finie de $k((t))$ sur laquelle on a une décomposition de la diagonale, et en remplaçant A par sa clôture intégrale dans cette extension, où l'on applique (i). On procède alors comme ci-dessus pour déduire (iv). □

Théorème 1.16. — *Dans l'espace projectif $\mathbf{P}^N$ paramétrant les hypersurfaces quartiques dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$, l'ensemble E des points de $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ paramétrant une quartique non rétracte rationnelle, et donc en particulier non stablement rationnelle, est Zariski-dense. Fixons un plongement $\overline{\mathbb{Q}}(t) \subset \mathbb{C}$. Le sous-ensemble de E formé des points dont les coordonnées sont dans $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ est Zariski dense dans $\mathbf{P}^N$.*

Démonstration. — Soit $W \subset \mathbf{P}^N_{\mathbb{Q}}$ le fermé correspondant aux quartiques singulières. D'après l'appendice, ou d'après J. Huh [**6**], il existe une quartique singulière Y définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et une résolution des singularités $f : Z \to Y$ telles que le $\overline{\mathbb{Q}}$-morphisme f est CH_0-trivial et que $\mathrm{Br} Z_{\mathbb{C}} \neq 0$, ce qui implique $\mathrm{Br} Z \neq 0$. Soit $D = \mathbf{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \subset \mathbf{P}^N_{\overline{\mathbb{Q}}}$ une droite passant par un $\overline{\mathbb{Q}}$-point $M \in \mathbf{P}^N$ associé à la quartique Y, et non contenue dans $W_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Soit A l'anneau local de la droite D au point M, et soit K son corps des fonctions. Le théorème 1.12 implique que la quartique lisse sur $K = \overline{\mathbb{Q}}(t)$ correspondant au point générique de D n'est pas géométriquement rétracte rationnelle.

Tout choix d'un point R de $D(\mathbb{C}) \setminus D(\overline{\mathbb{Q}})$ définit un plongement $\overline{\mathbb{Q}}(D) \hookrightarrow \mathbb{C}$, qui définit un plongement d'une clôture algébrique de $\overline{\mathbb{Q}}(D)$ dans $\mathbb{C}$. Par le lemme 1.1, la quartique lisse associée au point $R \in D(\mathbb{C}) \subset \mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ n'est donc pas rétracte rationnelle.

On voit donc que, pour tout point R de $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ non dans $\mathbf{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ et non dans W tel que la droite joignant R et M soit définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la quartique lisse associée à R n'est pas rétracte rationnelle. □

Remarque 1.17. — Soit Y un revêtement double d'une surface quartique d'Artin-Mumford [**1**] définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. La variété Y a exactement 10 points singuliers quadratiques ordinaires. Une désingularisation $Z \to Y$ s'obtient par éclatement de ces 10 points, au-dessus de chacun de ces points on a une quadrique lisse de dimension 2. La proposition 1.7 montre immédiatement que le morphisme de désingularisation est CH_0-trivial.

On obtient ainsi l'énoncé suivant, cas particulier d'un théorème de C. Voisin [**14**, Cor. 1.4] : *Dans l'espace projectif $\mathbf{P}^N$ paramétrant les surfaces quartiques $f = 0$ dans $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$, l'ensemble des points de $\mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ tels que le revêtement double associé $z^2 - f = 0$ dans l'espace multihomogène $\mathbf{P}(2, 1, 1, 1, 1)$ ne soit pas une variété stablement rationnelle est Zariski-dense.*

Remarque 1.18. — La démonstration du théorème 1.16 que nous avons donnée repose sur le théorème 1.12 et donc sur l'opération de spécialisation des zéro-cycles $CH_0(X) \to CH_0(Y)$, où X, resp. Y, est la fibre générique, resp. la fibre spéciale, d'un A-schéma propre fidèlement plat sur un anneau de valuation discrète A de corps des fractions K et de corps résiduel k. On pourrait si l'on voulait ignorer cette opération en la remplaçant par l'opération de spécialisation de la R-équivalence $X(K)/R \to Y(k)/R$, facile à définir [**10**]. Cette dernière suffit à établir le théorème 1.12.

2. Décomposition de la diagonale en famille et action des correspondances

2.1. Sur le lieu de décomposition de la diagonale. —

Lemme 2.1. — *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps non dénombrable k. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soit $\{B_i\}_i$ une famille dénombrable de sous-schémas fermés de B. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) un des B_i coïncide avec B ;

(ii) $\bigcup_i B_i$ contient le point générique de B ;

(iii) $B(\bar{k}) \subset \bigcup_i B_i(\bar{k})$;

(iv) $\bigcup_i B_i$ contient un point général de B : il existe un ouvert $U \subset B$ tel que $U(\bar{k}) \subset \bigcup_i B_i(\bar{k})$;

(v) $\bigcup_i B_i$ contient un point très général de B : il existe une famille dénombrable $\{F_j\}_j$ de fermés stricts de B, telle que $(B(\bar{k}) \setminus \bigcup_j F_j(\bar{k})) \subset \bigcup_i B_i(\bar{k})$.

Démonstration. — Les énoncés (i) et (ii) sont équivalents. Les implications (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidentes. Supposons (v). On a alors $B(\bar{k}) = \bigcup_j F_j(\bar{k}) \cup \bigcup_i B_i(\bar{k})$ avec $F_j \subset B$ des fermés stricts. Comme $\bar{k}$ est non dénombrable, cela implique qu'un des B_i coïncide avec B, d'où (i). □

Soit k un corps algébriquement clos. Soit X une variété propre intègre sur k, de dimension n, et soit $x \in X_{lisse}(k)$. Comme rappelé au §1 (Lemme 1.13 et remarque subséquente), on dit que X *admet une décomposition de Chow de la diagonale* s'il existe un diviseur $D \subset X$ et un cycle $Z \in Z_n(X \times X)$ à support dans $D \times X$ tels que

$$[\Delta_X] = [Z] + [X \times x] \text{ dans } CH_n(X \times X). \tag{2.1}$$

Proposition 2.2. — *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos k. Soit $X \to B$ un morphisme propre et plat, de dimension relative n, qui admet une section $\sigma : B \to X$. Il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_i$ de sous-schémas fermés de B telle que pour tout point*

$b \in B(k)$, on a

$$b \in \bigcup_i B_i(k) \Leftrightarrow X_b \text{ admet une décomposition de Chow de la diagonale.}$$

Démonstration. — Notons d'abord qu'on a une union dénombrable de schémas projectifs de type fini $\{F_i\}_i$ au-dessus de B qui paramètrent les cycles Z de codimension n sur $X \times_B X$ à support dans $D \times_B X$ pour D un diviseur dans X (il suffit de prendre les composantes du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}(X \times_B X/B) \times_B \mathrm{Hilb}(X/B)$ qui paramètrent les couples (Z_i, D_i) où Z_i est une composante irréductible dans une décomposition fixée $Z = \sum n_i Z_i$, D_i est un diviseur irréductible et $Z_i \subset D_i \times X$; les familles $(n_i)_i$ dans la décomposition forment un ensemble dénombrable). Soit F_i un de ces schémas. Il s'agit de formaliser la condition que le cycle Z correspondant à un point de F_i est rationnellement équivalent à $\Delta_X - X \times \sigma$ dans les fibres. Soit H_{jm} une composante de type fini du schéma de Hilbert de $X \times_B \mathbb{P}^1$ qui paramètre les m-uplets des sous-schémas de $X \times_B \mathbb{P}^1$ de codimension n, qui dominent $\mathbb{P}^1$. Soit $G_{ijm} \subset F_i \times H_{jm}$ le sous-schéma fermé

$$\{(Z, C_1, \ldots, C_m) \mid \Delta_X - Z - X \times \sigma = \sum_{t=1}^{m} (C_{t,0} - C_{t,\infty}).\}$$

L'image B_{ijm} de G_{ijm} dans B est un sous-schéma fermé de type fini. D'après [**5**, Section 1.5], $\bigcup_{i,j,m} B_{ijm}$ convient. ☐

En appliquant le lemme 2.1, on obtient

Théorème 2.3. — *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos k. Soit $X \to B$ un morphisme propre et plat. Supposons qu'il existe un k-point $b_0 \in B$, tel que la fibre X_{b_0} n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale. Alors pour $b \in B$ un point très général, la fibre X_b n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale.*

Démonstration. — Il existe un changement de base $\phi : B' \to B$ fini avec un point b'_0 au-dessus de b_0, un ouvert non vide $U \subset B'$ contenant le point b'_0 et une section $U \to X_{B'}$. Soit $F \subset B'$ le complémentaire de U dans B'. D'après le lemme précédent, on trouve une famille dénombrable de fermés $U_i \subset U$ tels que, pour $b \in U$, X_b admet une décomposition de Chow de la diagonale si et seulement si $b \in \bigcup U_i$. Soit $\bar{U}_i$ l'adhérence de U_i dans B'. On a donc que, pour tout point b dans le complémentaire de l'union des fermés $\phi(F) \cup \bigcup \phi(\bar{U}_i)$, la fibre X_b n'a pas de décomposition de Chow de la diagonale. Ce complémentaire est non vide car il contient le point b_0. ☐

2.2. Décomposition de la diagonale et action des correspondances sur la cohomologie de Betti d'un solide. —

Proposition 2.4. — *Soit Y un solide projectif intègre qui admet une décomposition de Chow de la diagonale. Supposons qu'il existe une désingularisation $\pi : \tilde{Y} \to Y$ de Y telle que pour toute composante E_i du diviseur exceptionnel E de π le groupe de cohomologie $H^2(\tilde{E}_i, \mathbb{Z})$ d'une désingularisation $\tilde{E}_i$ de E_i n'a pas de torsion.*

Alors le groupe $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion.

Démonstration. — D'après les hypothèses, on peut écrire une équivalence rationnelle de cycles

$$\Delta_{\tilde{Y}} \equiv Z + [\tilde{Y} \times x] + Z_1 + Z_2 \in CH_3(\tilde{Y} \times_k \tilde{Y}),$$

où $Z \subset \tilde{Y} \times \tilde{Y}$ est à support dans $D \times \tilde{Y}$ pour $D \subset \tilde{Y}$ un diviseur, Z_1 est à support dans $E \times \tilde{Y}$ et Z_2 est à support dans $\tilde{Y} \times E$. Comme la variété $\tilde{Y}$ est lisse, on dispose d'une action des correspondances sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$.

Soit $\mathcal{Z}$ une composante irréductible de Z_2 ; l'image de $\mathcal{Z}$ par la deuxième projection est contenue dans un fermé $F \subseteq E_i$ de codimension $c \geq 0$, pour un certain i. Soit $\pi_F : \tilde{F} \to F$ une désingularisation de F. Comme $\mathcal{Z}$ domine F, on peut supposer que $\mathcal{Z} = \pi_{F,*}\mathcal{Z}'$ pour $\mathcal{Z}' \subset \tilde{Y} \times \tilde{F}$. Montrons que l'action de $\mathcal{Z}$ se factorise par le groupe $H^{2-2c}(\tilde{F}, \mathbb{Z})$. Soit $\iota : \tilde{F} \to \tilde{Y}$. On a le diagramme commutatif suivant, où le carré du milieu commute d'après la formule de projection (cf. [**13**, Chap. 5, §6]) :

$$\begin{tikzcd}
H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_1^*"] \arrow[d, equal] & H^4(\tilde{Y}\times\tilde{F},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot[\mathcal{Z}']"] & H^{8-2c}(\tilde{Y}\times\tilde{F},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_{2,*}"] \arrow[d, "\iota_*"] & H^{2-2c}(\tilde{F},\mathbb{Z}) \arrow[d, "\iota_*"] \\
H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_1^*"] & H^4(\tilde{Y}\times\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot\iota_*[\mathcal{Z}']"] \arrow[u, "\iota^*"] & H^{10}(\tilde{Y}\times\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_{2,*}"] & H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

Le groupe $H^{2-2c}(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion : si $c = 0$, c'est l'hypothèse de la proposition, et si $c > 0$, soit ce groupe est nul, soit c'est le groupe H^0 d'une courbe lisse et il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. L'application $Z_{2,*}$ est donc nulle sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{tors}$. De même, l'application $[\tilde{Y} \times x]_*$ est nulle sur $H^4(\tilde{Y}, \mathbb{Z})_{tors}$.

De la même manière, d'après le diagramme commutatif ci-dessous l'action de chaque composante de Z_1 qui est à support dans $E_i \times \tilde{Y}$ se factorise par le groupe $H^4(\tilde{F}, \mathbb{Z})$ pour $F \subseteq E_i$ et $\tilde{F} \to F$ une désingularisation de F :

$$\begin{tikzcd}
H^4(\tilde{F},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_1^*"] & H^4(\tilde{F}\times\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot[\mathcal{Z}']"] & H^{8-2c}(\tilde{F}\times\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_{2,*}"] \arrow[d, "\iota_*"] & H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_1^*"] \arrow[u, "\iota^*"] & H^4(\tilde{Y}\times\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot\iota_*[\mathcal{Z}']"] \arrow[u, "\iota^*"] & H^{10}(\tilde{Y}\times\tilde{Y},\mathbb{Z}) \arrow[r, "pr_{2,*}"] & H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

Le groupe $H^4(\tilde{F},\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou nul, donc sans torsion, car $\tilde{F}$ soit est une surface lisse, soit est de dimension au plus un. L'application $Z_{1,*}$ est donc nulle sur $H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z})_{tors}$. De même, l'application Z_* se factorise par un groupe $H^4(\tilde{F},\mathbb{Z})$ pour $F \subseteq D$ un fermé et $\tilde{F} \to F$ une désingularisation de F ; l'application Z_* est donc nulle sur le groupe de torsion $H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z})_{tors}$.

Comme l'application $\Delta_{\tilde{Y}_*}$ est l'identité, le groupe $H^4(\tilde{Y},\mathbb{Z})_{tors}$ est nul. □

Remarque 2.5. — On notera que les hypothèses faites sur le diviseur exceptionnel de la désingularisation $\pi : \tilde{Y} \to Y$ sont a priori plus faibles que la CH_0-trivialité universelle demandée au §1.

Dans l'appendice, nous partons d'un solide quartique V, défini par une équation

$$\alpha(z_0,z_1,z_2)z_3^2 + \beta(z_0,z_1,z_2)z_3 + \gamma(z_0,z_1,z_2) + z_0^2 z_4^2 = 0, \tag{2.2}$$

birationnel à un solide d'Artin-Mumford [**1**]. Nous construisons une désingularisation $W \to V$ satisfaisant

(i) Les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel E de $W \to V$ sont des surfaces rationnelles.

(ii) le groupe $H^4(W,\mathbb{Z})_{tors}$ est non nul (ceci est donné par [**1**]).

Théorème 2.6. — *Dans l'espace projectif $\mathbf{P}^N$ paramétrant les hypersurfaces quartiques dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ un point très général correspond à une hypersurface quartique lisse qui n'est pas rétracte rationnelle, et en particulier non stablement rationnelle.*

Démonstration. — On applique le théorème 2.3 avec $B = \mathbf{P}^N$ et b_0 le point correspondant à une quartique V comme dans (2.2). D'après la proposition 2.4, la quartique V n'a pas de décomposition de Chow de la diagonale car le groupe $H^4(W,\mathbb{Z})_{tors}$ est non nul. L'énoncé suit alors des lemmes 1.5 et 1.13 a). □

Appendice A
Résolution des singularités d'une quartique $V \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ biratonnelle à un solide d'Artin–Mumford.

Soient $E_1, E_2 \subset \mathbb{P}^2$ deux courbes elliptiques lisses définies par des équations $\epsilon_1(z_0,z_1,z_2) = 0$ et $\epsilon_2(z_0,z_1,z_2) = 0$, et qui s'intersectent transversalement en 9 points, et soit $A \subset \mathbb{P}^2$ une conique lisse, définie par une équation $\alpha(z_0,z_1,z_2) = 0$, et qui est tangente à chaque E_i en 3 points distincts des points d'intersection $E_1 \cap E_2$. D'après [**1**], il existe deux formes homogènes $\beta(z_0,z_1,z_2)$ et

$\gamma(z_0, z_1, z_2)$, de degrés respectifs 3 et 4, telles que

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \epsilon_1\epsilon_2.$$

Lemme A.1. — *Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ la surface quartique définie par l'équation homogène*

$$g = \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma(z_0, z_1, z_2) = 0. \tag{A.1}$$

(i) Les singularités de la surface S sont des points doubles ordinaires : le point $P_0 = (0 : 0 : 0 : 1)$ et les neuf points dont les projections depuis P_0 sur le plan $z_3 = 0$ sont les points de $E_1 \cap E_2$.

(ii) L'ensemble $M = \{g = 0, \frac{\partial g}{\partial z_1} = 0, \frac{\partial g}{\partial z_3} = 0\} \cup \{g = 0, \frac{\partial g}{\partial z_2} = 0, \frac{\partial g}{\partial z_3} = 0\}$ est fini.

Démonstration. — La partie (i) est dans [**1**]. Montrons (ii). Soit $Q = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in M \setminus \{P_0\}$. Soit $q = (z_0 : z_1 : z_2)$ la projection de Q sur le plan $z_3 = 0$. Supposons $\frac{\partial g}{\partial z_1}(Q) = 0$, le deuxième cas est identique. La condition $\frac{\partial g}{\partial z_3}(Q) = 0$ donne $\beta(q) = -2z_3\alpha(q)$. Montrons que l'on a $\alpha(q) \neq 0$. Sinon, la condition précédente donne $\beta(q) = 0$ et donc $\gamma(q) = 0$ d'après l'équation. Ainsi la multiplicité de $\epsilon_1\epsilon_2$ en q est 2. Comme E_1 et E_2 sont lisses, on en déduit que $Q \in E_1 \cap E_2$ et on obtient une contradiction car A ne passe pas par $E_1 \cap E_2$. On a donc $\alpha(q) \neq 0$ et $z_3 = -\frac{\beta(q)}{2\alpha(q)}$.

On écrit

$$4\alpha \cdot g = (2z_3\alpha + \beta)^2 - \epsilon_1\epsilon_2. \tag{A.2}$$

Comme $\beta(q) = -2z_3\alpha(q)$, on a donc $\epsilon_1\epsilon_2(q) = 0$. On peut supposer $\epsilon_1(q) = 0$, le deuxième cas est similaire. Comme $\alpha(q) \neq 0$, on a $z_3 = -\frac{\beta(q)}{2\alpha(q)}$. En dérivant l'équation (A.2) par rapport à z_1, on déduit $\frac{\partial g}{\partial z_1}(Q) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \epsilon_1\epsilon_2}{\partial z_1}(q) = 0$. Comme $\epsilon_1(q) = 0$, on a soit $\epsilon_2(q) = 0$, soit $\frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_1}(q) = 0$. Dans le premier cas, q appartient à l'ensemble fini $E_1 \cap E_2$. Sinon q appartient à l'ensemble $\{\epsilon_1 = 0, \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_1} = 0\}$, qui est fini car E_1 est une courbe elliptique lisse.

□

Comme l'ensemble $M \setminus \{P_0\}$ est fini, quitte à avoir fait un changement linéaire en les coordonnées z_0, z_1, z_2, on peut supposer dans la suite :

(A.3)

L'hyperplan $z_0 = 0$ ne contient aucun point de $M \setminus \{P_0\}$ ni aucun point de l'intersection de A et $E_1 \cup E_2$, et il n'est pas tangent à la conique A.

Soit $V \subset \mathbb{P}^4$ une quartique définie par l'équation homogène

$$f = \alpha(z_0, z_1, z_2)z_3^2 + \beta(z_0, z_1, z_2)z_3 + \gamma(z_0, z_1, z_2) + z_0^2z_4^2 = 0. \tag{A.4}$$

Soit $L \subset \mathbb{P}^4$ la droite d'équation $z_0 = z_1 = z_2 = 0$.

Lemme A.2. — *Les points singuliers de la quartique V qui ne sont pas situés sur la droite L sont 9 points doubles ordinaires.*

Démonstration. — Soit $Q = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4) \in V \setminus L$ un point singulier. Si $z_0 = 0$, alors le point $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ est un point singulier de S. D'après le choix de l'hyperplan $z_0 = 0$, c'est le point $(0 : 0 : 0 : 1) \in L$. On a donc $z_0 \neq 0$. On a $\frac{\partial f}{\partial z_4} = 2z_0^2 z_4 = 0$, d'où $z_4 = 0$ et le point $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ correspond encore à un point singulier de la surface S définie par (A.1). Comme la surface S n'a que des points doubles ordinaires d'après le lemme A.1, on a des coordonnées locales $\mathfrak{z}_i$, $i = 1 \dots 3$ telles que l'équation locale de g s'écrive comme une somme de $\sum_{i=1}^3 \mathfrak{z}_i^2$ et de termes de plus haut degré. Comme $z_0 \neq 0$, on a les coordonnées locales $\mathfrak{z}_1, \dots \mathfrak{z}_3, z_4$ de Q et l'équation de f s'écrit comme $\sum_{i=1}^3 \mathfrak{z}_i^2 + z_4^2 +$termes de degré supérieur ; on a donc que Q est un point double ordinaire. □

Soit $V' \to V$ l'éclatement de la droite $L \subset V$. Soit $P \in L$ le point $z_3 = 0$.

Lemme A.3. — *La variété V' est lisse en tout point de V' au-dessus de $L \setminus P$. Le diviseur exceptionnel E' de $V' \to V$ est une surface rationnelle, les fibres de l'application $E' \to L$ sont des coniques et la fibre générique est lisse.*

Démonstration. — Soit $Q' \in V'$ un point singulier au-dessus d'un point $Q = (0 : 0 : 0 : z_3 : z_4) \in L$. On a donc soit $z_3 \neq 0$, soit $z_4 \neq 0$.

1. Si $z_4 \neq 0$, on a une équation de V dans les coordonnées affines $x_i = \frac{z_i}{z_4}$, $0 \leq i \leq 3$
$$\alpha(x_0, x_1, x_2)x_3^2 + \beta(x_0, x_1, x_2)x_3 + \gamma(x_0, x_1, x_2) + x_0^2 = 0.$$
Comme les rôles de x_1 et x_2 sont symétriques, on n'a que deux cartes de l'éclatement à considérer :
   (a) $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1 y_0, x_2 = y_2 y_0$, $x_3 = y_3$. L'équation de V' s'écrit
   $$\alpha(1, y_1, y_2)y_3^2 + \beta(1, y_1, y_2)y_0 y_3 + \gamma(1, y_1, y_2)y_0^2 + 1 = 0.$$
   Pour tout point de V' au-dessus de L on a $y_0 = 0$ et on obtient l'équation de E'
   $$\alpha(1, y_1, y_2)y_3^2 + 1 = 0.$$
   Les fibres au-dessus des points de L sont donc des coniques et la fibre au-dessus du point générique Spec $\mathbb{C}(y_3)$ de L est lisse.
   Si $Q' = (0, y_1, y_2, y_3)$ est un point singulier de V' au-dessus d'un point de L, on a donc $\alpha(Q')y_3^2 + 1 = 0$ de l'équation ci-dessus et $\alpha(Q') \cdot 2y_3 = 0$, en dérivant par rapport à z_3, ce qui n'est pas possible.

(b) $x_0 = y_0y_1$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1y_2$, $x_3 = y_3$. L'équation de V' s'écrit

$$\alpha(y_0, 1, y_2)y_3^2 + \beta(y_0, 1, y_2)y_1y_3 + \gamma(y_0, 1, y_2)y_1^2 + y_0^2 = 0. \tag{A.5}$$

Pour tout point de V' au-dessus de L on a $y_1 = 0$ et l'équation de E' s'écrit

$$\alpha(y_0, 1, y_2)y_3^2 + y_0^2 = 0.$$

Les fibres au-dessus des points de L sont donc des coniques. Pour un point singulier de la fibre au-dessus du point générique Spec $\mathbb{C}(y_3)$ de L, on vérifie d'abord que $y_0 = 0$, puis que $(0 : 1 : y_2)$ donne un point singulier de A (défini sur le corps $\mathbb{C}(y_3)$), ce qui n'est pas possible. La fibre générique est donc une conique lisse.

Soit $Q' = (y_0, 0, y_2, y_3)$ un point singulier de V'.

(i) Si $y_3 \neq 0$, on a $\alpha(Q') \cdot 2y_3 = 0$, d'où $\alpha(Q') = 0$. On déduit de l'équation de V' que $y_0 = 0$ et puis que $\frac{\partial\alpha(y_0,1,y_2)}{\partial y_i} = \frac{\partial\alpha}{\partial z_i}(y_0, 1, y_2) = 0$ pour $i = 0, 2$. Comme $\alpha(0, 1, y_2) = 0$, on en déduit que le point $(0 : 1 : y_2)$ est un point singulier de A, contradiction.

(ii) Si $y_3 = 0$, alors $y_0 = 0$ de l'équation de V'. On vérifie qu'effectivement tous les points de la droite $y_0 = y_1 = y_3 = 0$ sont des points singuliers.

2. Supposons $z_3 \neq 0$. On a donc l'équation de V en coordonnées affines :

$$\alpha(x_0, x_1, x_2) + \beta(x_0, x_1, x_2) + \gamma(x_0, x_1, x_2) + x_0^2x_4^2 = 0.$$

Il suffit d'analyser deux cartes de l'éclatement :

(a) $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1y_0, x_2 = y_2y_0$, $x_4 = y_4$. L'équation de V' s'écrit

$$\alpha(1, y_1, y_2) + \beta(1, y_1, y_2)y_0 + \gamma(1, y_1, y_2)y_0^2 + y_4^2 = 0.$$

Pour tout point de V' au-dessus de L, on a $y_0 = 0$, et l'équation de E' s'écrit

$$\alpha(1, y_1, y_2) + y_4^2 = 0.$$

Le fibres au-dessus des points de L sont donc des coniques et la fibre au-dessus du point générique Spec $\mathbb{C}(y_4)$ de L est lisse.

Si $Q' = (0, y_1, y_2, y_4)$ est un point singulier de V' au-dessus d'un point de L, on a donc $2y_4 = 0$, d'où $y_4 = 0$ et puis $\alpha(Q') = 0$. Comme dans le cas $1(b)(i)$, on montre que Q' est un point singulier de A, contradiction.

(b) $x_0 = y_0y_1$, $x_1 = y_1, x_2 = y_2y_1$, $x_4 = y_4$. L'équation de V' s'écrit

$$\alpha(y_0, 1, y_2) + \beta(y_0, 1, y_2)y_1 + \gamma(y_0, 1, y_2)y_1^2 + y_0^2y_4^2 = 0$$

et au-dessus de L on a $y_1 = 0$ et on obtient l'équation

$$\alpha(y_0, 1, y_2) + y_0^2 y_4^2 = 0.$$

Ici encore pour un point singulier au-dessus du point générique $\operatorname{Spec} \mathbb{C}(y_4)$ de L on voit d'abord que $y_0 = 0$, puis que le point $(0 : 1 : y_2)$ correspond à un point singulier de A (défini sur le corps $\mathbb{C}(y_4)$), contradiction.

Si $Q' = (y_0, 0, y_2, y_4)$ est un point singulier de V', on a $2y_4 y_0^2 = 0$. On a donc $\alpha(Q) = 0$ et $\frac{\partial\alpha(y_0,1,y_2)}{\partial y_i} = 0, i = 0, 2$, on obtient donc un point singulier de A, contradiction.

$\square$

Soit $L' \subset V'$ la droite image réciproque du point P. Soit $V'' \to V'$ l'éclatement de la droite L'.

Lemme A.4. — *Les seules singularités de V'' sont des points doubles ordinaires. La variété V'' est lisse en tout point au-dessus de L. Le diviseur exceptionnel E'' de $V'' \to V'$ est une surface rationnelle lisse et les fibres de l'application $E'' \to L'$ sont des coniques.*

Démonstration. — On reprend l'équation de la carte singulière (A.5) de V' :

$$\alpha(y_0, 1, y_2)y_3^2 + \beta(y_0, 1, y_2)y_1 y_3 + \gamma(y_0, 1, y_2)y_1^2 + y_0^2 = 0.$$

Notons qu'on a une deuxième carte singulière, en échangeant les rôles de x_1 et x_2 dans le lemme précédent.

On a trois cartes affines dans l'éclatement V'' de la droite $L' : y_0 = y_1 = y_3 = 0$ au-dessus de la carte (A.5).

1. $y_0 = u_0, y_1 = u_0 u_1, y_2 = u_2, y_3 = u_0 u_3$. L'équation de V'' s'écrit

$$\alpha(u_0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(u_0, 1, u_2)u_1 u_3 + \gamma(u_0, 1, u_2)u_1^2 + 1 = 0.$$

Pour tout point au-dessus de L' on a $u_0 = 0$ et obtient l'équation de E''

$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_1 u_3 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 + 1 = 0.$$

Pour un point singulier de E'', on a $\alpha(0, 1, u_2) \cdot 2u_3 + \beta(0, 1, u_2) \cdot u_1 = 0$ et $\beta(0, 1, u_2) \cdot u_3 + \gamma(0, 1, u_2) \cdot 2u_1 = 0$, d'où

$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_1 u_3 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 = 0 \neq -1.$$

De même, pour un point singulier Q'' de V'' on montre que

$$\alpha(Q'')u_3^2 + \beta(Q'')u_1 u_3 + \gamma(Q'')u_1^2 = 0 \neq -1.$$

2. $y_0 = u_0u_1, y_1 = u_1, y_2 = u_2, y_3 = u_1u_3$. L'équation de V'' s'écrit
$$\alpha(u_0u_1, 1, u_2)u_3^2 + \beta(u_0u_1, 1, u_2)u_3 + \gamma(u_0u_1, 1, u_2) + u_0^2 = 0.$$
Pour tout point au-dessus de L' on a $u_1 = 0$ et on obtient l'équation de E''
$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_3 + \gamma(0, 1, u_2) + u_0^2 = 0.$$
Pour un point singulier de E'' on a $2u_0 = 0$, donc
$$\alpha(0, 1, u_2)u_3^2 + \beta(0, 1, u_2)u_3 + \gamma(0, 1, u_2) = 0.$$
Puis on obtient $2\alpha(0, 1, u_2)u_3 + \beta(0, 1, u_2) = 0$ en dérivant par rapport à u_3. Comme $\frac{\partial\alpha(0,1,u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial\alpha}{\partial z_3}(0, 1, u_2)$ et de même pour β et γ, en dérivant par rapport à z_2, on déduit que $(0 : 1 : u_2 : u_3) \in M \setminus \{P_0\}$, ce qui n'est pas possible d'après l'hypothèse A.3.

Pour un point singulier Q'' de V'' on a une analyse similaire : $\frac{\partial\alpha(u_0u_1,1,u_2)}{\partial u_0} = 0$ et de même pour β et γ, d'où $u_0 = 0$ en prenant la dérivée par rapport à u_0. En prenant la dérivée par rapport à u_2 on en déduit que la projection $(0 : 1 : u_2 : u_3)$ de Q'' est dans $M \setminus \{P_0\}$, contradiction avec le choix de l'hyperplan $z_0 = 0$.

3. $y_0 = u_0u_3, y_1 = u_1u_3, y_2 = u_2, y_3 = u_3$. L'équation de V'' s'écrit
$$\alpha(u_0u_3, 1, u_2) + \beta(u_0u_3, 1, u_2)u_1 + \gamma(u_0u_3, 1, u_2)u_1^2 + u_0^2 = 0.$$
Ici, pour tout point au-dessus de L' on a $u_3 = 0$ et on obtient l'équation de E''
$$\alpha(0, 1, u_2) + \beta(0, 1, u_2)u_1 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 + u_0^2 = 0.$$
Pour un point singulier de E'' on a $2u_0 = 0$, d'où
$$\alpha(0, 1, u_2) + \beta(0, 1, u_2)u_1 + \gamma(0, 1, u_2)u_1^2 = 0.$$
Si $u_1 \neq 0$, on montre de la même façon que dans la carte précédente que $(0 : 1 : u_2 : \frac{1}{u_1}) \in M \setminus P_0$ et on obtient une contradiction. Si $u_1 = 0$, on a $\alpha(0, 1, u_2) = 0$ de l'équation, et puis $\beta(0, 1, u_2) = -2u_1\gamma(0, 1, u_2) = 0$. On a donc $(0 : 1 : u_2) \in A \cap (E_1 \cup E_2)$, contradiction avec l'hypothèse A.3.

Pour Q'' un point singulier de V'' on a $\frac{\partial\alpha(u_0u_3,1,u_2)}{\partial u_0} = 0$ et de même pour β et γ, d'où $u_0 = 0$. On déduit de même que soit $u_1 \neq 0$ et $(0 : 1 : u_2 : u_1^{-1}) \in M \setminus \{P_0\}$, soit $u_1 = 0$ et $(0 : 1 : u_2) \in A \cap (E_1 \cup E_2)$, ce qui n'est pas possible d'après le choix de l'hyperplan $z_0 = 0$.

□

Soit $W \to V''$ l'éclatement des points doubles ordinaires de V''.

Proposition A.5. — *(i) La variété W est lisse.*

(ii) Le diviseur exceptionnel E de la résolution $\pi : W \to V$ s'écrit comme l'union disjointe $E = \sqcup_{i=1}^{10} E_i$, où

(iia) les composantes $E_1, \dots E_9$ sont des quadriques lisses au-dessus de points doubles ordinaires ;

(iib) E_{10} est l'union de deux surfaces rationnelles $E' \cup E''$, le morphisme π induit une fibration $E' \to L$ dont les fibres sont des coniques et la fibre générique est lisse, E'' est lisse et $\pi(E'') = P$.

(iii) Le morphisme $W \to V$ est un CH_0-isomorphisme universel.

(iv) le groupe $H^4(W, \mathbb{Z})_{tors}$ est non nul.

Démonstration. — Les propriétés (i) et (ii) résultent de la construction et des lemmes précédents. D'après la proposition 1.7, pour établir (iii) il suffit de vérifier que sur tout corps F les fibres de $W_F \to V_F$ au-dessus des F-points sont CH_0-triviales, ce qui résulte de (*ii*) car ces fibres sont soit la F-surface rationnelle projective et lisse E''_F, soit une F-conique lisse avec un point rationnel, soit une conique réductible sur F, soit une F-surface quadrique lisse déployée. Puisque W est birationnelle à la variété d'Artin-Mumford, la propriété (iv) résulte de [**1**]. □

Références

[1] M. Artin et D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972) 75–95.

[2] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, prépublication, disponible à l'adresse `http://arxiv.org/abs/1310.6705v2`

[3] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. math. **97** (1989) 141–158.

[4] W. Fulton, Rational equivalence on singular varieties, Publ. Math. I.H.É.S. **45** (1975) 147–167.

[5] W. Fulton, Intersection theory, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[6] J. Huh, A counterexample to the geometric Chevalley-Warning conjecture, prépublication disponible à l'adresse `http://arxiv.org/abs/1307.7765v3`

[7] V. A. Iskovskikh et Yu. I. Manin, Quartiques de dimension trois et contre-exemples au problème de Lüroth (en russe) Mat. Sb. (N.S.) **86** (128) (1971), 140–166.

[8] N. Karpenko et A. S. Merkurjev, On standard norm varieties, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4ième série, **46** (2013), no. 8, 175–214.

[9] I. Karzhemanov, On one stable invariant, prépublication, disponible à l'adresse `http://arxiv.org/abs/1307.5605v4`

[10] D. Madore, Sur la spécialisation de la R-équivalence, prépublication, disponible à l'adresse `http://www.math.ens.fr/~madore/specialz.pdf`

[11] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. London Math. Soc. (2) **78** (2008) 51–64.

[12] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. **1** (1996) no. 16, 319–393.

[13] E. Spanier, Algebraic Topology, Springer, 1994.

[14] C. Voisin, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, prépublication, disponible à l'adresse `http://arxiv.org/abs/1312.2122v3`

---

27 mars 2014

J.-L. Colliot-Thélène, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`

A. Pirutka, C.N.R.S., École Polytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau, France
E-mail : `alena.pirutka@math.polytechnique.fr`