SUR LE MOUVEMENT D'UN LIQUIDE VISQUEUX EMPLISSANT L'ESPACE[1]

Par

JEAN LERAY

à Rennes

Introduction.[2]

I. *La théorie de la viscosité* conduit à admettre que les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier; il est nécessaire de justifier a posteriori cette hypothèse en établissant *le thèoreme d'existence suivant:* il exist une solution des èquations de Navier qui correspond à un état de vitesse donné arbitrairement à l'instant initial. C'est ce qu'a cherché à démontrer M. Oseen[3]; il n'a réussi à établir l'existence d'une telle solution que pour une durée trés brève succédant à l'instant initial. On peut vérifier en outre que l'énergie cinétique totale du liquide reste bornée[4]; mais il ne semble pas possible de déduire de ce fait que le mouvement lui-même reste régulier; j'ai même indiqué une raison qui me fait croire à l'existence de mouvements devenant irréguliers au bout d'un temps fini[5]; je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité.

[1] Ce mémoire a été résumé dans une note parue aux Comptes rendus de l'Academie des Sciences, le 20 février 1933, T. 196, p. 527.

[2] Les pages 59–63 de ma These (Journ. de Math. 12, 1933) announcent ce mémoire et en completent l'introduction.

[3] Voir Hydrodynamik (Leipzig, 1927), §7, p. 66. Acta mathematica T. 34. Arkiv för matematik, astronomi och fysik. Bd. 6, 1910. Nova acta reg. soc. scient. Upsaliensis Ser. IV, Vol. 4, 1917.

[4] l. c. 2, p. 59–60.

[5] l. c. 2, p. 60–61. Je reviens sur ce sujet an §20 du présent travail (p. 224).

reset from: 25–34198. *Acta mathematica.* 63. Imprimé le 5 juillet 1934.

ON THE MOTION OF A VISCOUS LIQUID FILLING SPACE[1]

by

JEAN LERAY

in Rennes

Introduction.[2]

I. *The theory of viscosity* leads one to allow that motions of a viscous liquid are governed by Navier's equations. It is necessary to justify this hypothesis a posteriori by establishing *the following existence theorem:* there is a solution of Navier's equations which corresponds to a state of velocity given arbitrarily at an initial instant. That is what Oseen tried to prove[3]. He only succeeded in establishing the existence of such a solution for a possibly very short time after the initial instant. One can also verify that the total kinetic energy of the liquid remains bounded[4] but it does not seem possible to deduce from this fact that the motion itself remains regular*. I have indicated a reason which makes me believe there are motions which become irregular in a finite time[5]. Unfortunately I have not succeeded in creating an example of such a singularity.

---

[1] This paper has been summarized in a note which appeared in Comptes rendus de l'Academie des Sciences, February 20 1933, vol. 196, p. 527.

[2] Pages 59–63 of my Thesis (Journ. de Math. 12, 1933) announce this paper and complement this introduction.

[3] See Hydrodynamik (Leipzig, 1927), §7, p. 66. Acta mathematica vol. 34. Arkiv för matematik, astronomi och fysik. Bd. 6, 1910. Nova acta reg. soc. scient. Upsaliensis Ser. IV, Vol. 4, 1917.

[4] l. c. 2, p. 59–60.

[5] l. c. 2, p. 60–61. I return to this subject in §20 of the present work (p. 224).

---

reset from: Acta mathematica. 63. Printed July 5, 1934.

* `Translator's note:` "regular" is defined on p. 217.

Il n'est pas paradoxal de supposer en effet que la cause qui régularise le mouvement — la dissipation de l'énergie — ne suffise pas à maintenir bornées et continues les dérivées secondes des conposantes de la vitesse par rapport aux coordonnées; or la théorie de Navier suppose ces dérivées secondes bornées et continues; M. Oseen lui-même a déjà insisté sur le caractère peu naturel de cette hypothése; il a montré en même temps comment le fait que le mouvement obéit aux lois de la mécanique peut s'exprimer à l'aide d'équations intégro- différentielles[1], oú figurent seulement les composantes de la vitesse et leurs dérivées premiéres par rapport aux coordonnées spatiales. Au cours du présent travail je considère justement un systéme de relations[2] qui équivalent aux équations intégro-différentielles de M. Oseen, complétés par une inégalité exprimant la dissipation de l'énergie. Ces relations se déduisant d'ailleurs des équations de Navier à l'aide d'intégrations par parties qui font disparaître les dérivées d'ordres les plus élevés. Et, si je n'ai pu réussir à etablir le théorème d'existence énoncé plus haut, j'ai pu néammoins démontrer le suivant[3]: les relations en question possèdent toujours *au moins une solution* qui correspond à un état de vitesse donné initialement et *qui est définie pour une durée illimité*, dont l'origine est l'instant initial. Peut-être cette solution est-elle trop peu régulière pur posséder à tout instant des dérivées seconds bornées; alors elle n'est pas, au sens propre du terme, une solution des équations de Navier; je propose de dire qu'elle en constitue <<*une solution turbulent*>>.[4]

Il est d'ailleurs bien remarquable que chaque solution turbulente satisfait effectivement les équations de Navier proprement dites, sauf à certaines époques d'irrégularité; ces époques constituent un ensemble fermé de mesure nulle; à ces époques sont seules vérifiées certaines conditions de continuité extrêmement larges.

---

[1] Oseen, Hydrodynamik, §6, équation (1).

[2] Voir relations (5.15), p. 240.

[3] Voir p. 241.

[4] Je me permets de citer le passage suivant de M. Oseen (Hydrodynamik): << A un autre point de vue encore il semble valoir la peine de soumettre à une étude attentive les singularités du mouvement d'un liquide visqueux. S'il peut surgir des singularités, il nous faut manifestement distinguer deux espèces de mounvements d'un liquide visqueux. les mouvements réguliers, c'est-à-dire les mouvements sans singularité, et les mouvements irréguliers, c'est-à-dire les mouvements avec singularité. Or on distingue d'autre part en Hydraulique deux sortes de mouvements, les mouvements laminaires et les mouvements turbulents. On est des lors tenté de présumer que les mouvements laminaires fournis par les expériences sont identiques aux mouvements réguliers théoriques et que les mouvements turbulents expérimentaux s'identifient aux mouvements irréguliers théoriques. Cette présumption répond-elle à la réalité? Seules des recherches ultérieures pourront en décider>>.

In fact it is not paradoxical to suppose that the thing which regularizes the motion–dissipation of energy–does not suffice to keep the second derivatives of the velocity components bounded and continuous. Navier's theory assumes the second derivatives bounded and continuous. Oseen himself had already emphasised that this was not a natural hypothesis. He showed at the same time how the fact that the motion obeys the laws of mechanics could be expressed by means of integro-differential equations[1] which contain only the velocity components and their first spatial derivatives. In the course of the present work I consider a system of relations[2] equivalent to Oseen's integro-differential equations complemented by an inequality expressing dissipation of energy. Moreover, these relations may be deduced from Navier's equations, using an integration by parts which causes the higher order derivatives to disappear. And, if I have not succeeded in establishing the existence theorem stated above, I have nevertheless proved the following[3]: the relations in question always have *at least one* solution corresponding to a given initial velocity and *which is defined for an unlimited time* of which the origin is the initial instant. Perhaps that solution is not sufficiently regular to have bounded second partial derivatives at each instant, so it is not, in a proper sense of the term, a solution to Navier's equations. I propose to say that it constitutes "*a turbulent solution*".

It is moreover quite remarkable that each turbulent solution actually satisfies Navier's equations, properly said, except at certain times of irregularity. These times constitute a closed[*] set of measure zero. At these times alone must the continuity of the solution be interpreted in a very generous sense.

[1] Oseen, Hydrodynamik, §6, equation (1).

[2] See relations (5.15), p. 240.

[3] See p. 241.

[4] I allow myself to cite a passage from Oseen (Hydrodynamik): "From still another point of view it seems worth the trouble to subject the singularities of the motion of a viscous liquid to careful study. If singularities appear, then we must distinguish two types of motion of a viscous liquid, regular motion, which is to say motion without singularity, and irregular motion, which is to say motion with singularity. Now in other parts of Hydraulics one distinguishes two sorts of motion, laminar and turbulent. One is tempted from now on to presume that laminar motions furnished by experiment are identical to theoretical regular motions, and that experimental turbulent motions are identified with irregular theoretical motion. Does this presumption correspond with reality? Only further research will be able to decide."

[*] [translator's note: The set is compact, as is proved on p. 246.]

Une *solution turbulent* a donc *la structure* suivante: elle se compose *d'une succession de solutions régulieres.*

Si j'avais réussi à construire des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulieres, j'aurais le droit[1] d'affirmer qu'il existe effectivement des solutions turbulent ne se réduisant pas,tout simplement, à des solutions régulieres. Même si cette proposition était fausse, la notion de solution turbulente, qui n'aurait dés lors plus à jouer aucun rôle dans l'étude des liquides visqueux, ne perdrait pas son intéret: il doit bien se présenter *des problems* de Physique mathématique pour lesquels *les causes physiques de régularité* ne suffisent pas à justifier *les hypothéses de régularité faites lors de la mise en équation:* à ces probléms peuvent alors s'appliquer des considérations semblables à celles que j'expose ici.

Signalons enfin les deux faits suivants:

Rien ne permet d'affirmer l'unicité de la solution turbulente qui correspond à un état initial donné. (Voir toutefois Compléments 1^o, p. 245; §33).

La solution qui correspond à un état initial suffisamment voisin du repos ne devient jamais irrégulière. (Voir les cas de régularité que signalent les §21 et 22, p. 226 et 227).

II. Le travail présent concerne les liquides visqueux illimités. Les conclusions en sont extrémement analogues à celles d'un autre mémoire[2] que j'ai consacré aux mouvements plans des liquides visqueux enfermés dans des parois fixes convexes; ceci autorise à croire que ces conclusions s'étendent au cas général d'un liquide visqueux à deux ou trois dimensions que limitent des parois quelconques (même variables).

L'absense de parois introduit certes quelques complications concernant l'allure à l'infini des fonctions inconnues[3], mais simplifie beaucoup l'exposé et met mieux en lumière les difficultés essentielles; le rôle important que joue l'homogénéité des formules est plus évident; (les équations aux dimensions permettent de prévoir a priori presque toutes les inégalités que nous écrirons).

---

[1] En vertu du théorem d'existence du §31 (p. 241) et du théoreme d'unicité du §18 (p. 222).

[2] Journal de Mathématiques, T. 13, 1934.

[3] Les conditions à l'infini par lesquelles nous caractérisons celles des équations de Navier que nous nommons régulieres different essentiellement des conditions qu'emploie M. Oseen.

A *turbulent solution* therefore has the following *structure*: it is composed of a *succession of regular solutions.*

If I succeed in constructing solutions to Navier's equations which become irregular, then I can say that there exist turbulent solutions which do not simply reduce to regular solutions. Likewise if this proposition is false, the notion of turbulent solution, which from then on plays no role in the study of viscous liquids, still does not lose interest: it serves to present *problems* of mathematical Physics for which *the physical cause of regularity* does not suffice to justify *the hypothesis of regularity made at the time of writing the equation*; to these problems then one can apply considerations similar to those which I introduce here.

Finally let us point out the two following facts:

Nothing allows one to assert the uniqueness of a turbulent solution which corresponds to a given initial state. (See however Supplementary information 1^o, p. 245; §33).

A solution which corresponds to an initial state sufficiently near rest never becomes irregular. (See the case of regularity pointed out in §21 and §22, p. 226 and 227.)

II. The present work concerns unlimited viscous liquids. The conclusions are quite analogous to those of another paper[2] that I devoted to plane motion of a viscous liquid enclosed within fixed convex walls; this leads to the belief that its conclusions extend to the general case of a viscous liquid in two or three dimensions bounded by arbitrary walls (same variables).

The absence of walls indeed introduces some complications concerning the unknown behavior of functions at infinity[3] but greatly simplifies the exposition and brings the essential difficulties more to light. The important role played by homogeneity of the formulas is more evident (the equations in dimensions allow us to predict a priori nearly all the inequalities that we write).

---

[1] In virtue of the existence theorem of §31 (p. 241) and of the uniqueness theorem of §18 (p. 222).

[2] Journal de Mathématiques, T. 13, 1934.

[3] The conditions at infinity by which we characterize those solutions of Navier's equations which we call regular, differ essentially from those of Oseen.

Rapellons que nous avons déjà traité le cas des mouvements plans illimités[1]: il est asswz spécial[2]; la régularité du mouvement est alors assurée.

Sommaire du mémoire.

Le chapitre I rappelle au Lecteur une série de propositions d'Analyse, qui sont importantes, mais qu'on ne peut pas toutes considérer comme classiques.

Le chapitre II établit diverses inégalités préliminaires, aisément déduites des propriétes que possède la solutions fondamentale de M. Oseen.

Le chapitre III applique ces inégalités à l'étude des solutions régulières des équations de Navier.

Le chapitre IV énonce diverses propriétes des solutions régulières, dont fera usage le chapitr VI.

Le chapitre V établit qu'à tout état initial correspond au moins une solution turbulente, qui est définie pendant une durée illimitée. La démonstration de ce *théorem d'existence* repose sure le *principe* suivant: On n'aborde pas directement le problème posé, qui est de résoudre les equations de Navier; mais on traite d'abord un problème voisin dont on peut s'assurer qu'il admet toujours une solution régulière, définie pendant une durée illimitée; on fait tendre ce problème voisin vers le problème posé et l'on construit la limite (ou les limites) de sa solution. Il existe bien une façon elementaire d'appliquer ce principe: c'est celle qu'utilise mon étude des mouvements plans des liquides visqueux limités par des parois; mais elle est intimement liée à cette structure des solutions turbulentes que nous avons précédemment signalée; elle ne s'appliquerait pas si cette structure n'était pas assurée. Nous procèderons ici d'une autre façon, dont la portée est vraisemblablement plus grande, qui jutifie mieux la notion de solution turbulente, mais qui fait appel à quelques théormes peu usuels cités au chapitre I.

Le chapitre VI étude la structure des solutions turbulentes.

---

[1] Thesis, Journal de Mathèmatiques 12, 1933; chapitre IV p. 64-82. (On peut donner une variante intéressante au procédé que nous y employons en utilisant la notion d'état initial semirégulier qu'introduit le mémoire présent.)

[2] On peut dans ce cs baser l'étude du problème sure la propriété que possède alors le maximum du tourbillon à un instant donné d'être une fonction décroissante du temps. (Voir: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 194; p. 1893; 30 mai 1932). – M. Wolibner a lui aussi fait cette remarque.

Recall that we have already treated the case of unlimited motions in the plane[1]. These are special[2] because the motion is regular.

Summary of the paper.

Chapter I recalls a series of propositions of analysis which are important, but which are not entirely classical.

Chapter II establishes several preliminary inequalities easily deduced from properties of Oseen's fundamental solution.

Chapter III applies the inequalities to the study of regular solutions of Navier's equation.

Chapter IV states several properties of regular solutions to be used in Chapter VI.

Chapter V establishes that for each initial state, there is at least one turbulent solution defined for unlimited time. The proof of this *existence theorem* is based on the following *principle*: one doesn't directly approach the problem of solving Navier's equations; instead one treats a neighboring problem which can be proved to have a regular solution of unlimited duration; we let the neighboring problem tend toward the original problem to construct the limit (or limits) of these solutions. There is an elementary method to apply this principle: it is the same one which I used in my study of planar motion of a viscous liquid within walls, but it is intimately bound with the structure of turbulent solutions which we have previously pointed out. Without this structure the method may not apply. Here we proceed in another fashion whose range is very likely larger, and which justifies the notion of turbulent solution, but which requires calling on some of the less ordinary theorems of chapter I.

Chapter VI studies the structure of turbulent solutions.

---

[1] Thesis, Journal de Mathèmatiques 12, 1933; chapter IV p. 64-82. (One can give an interesting variation on the process used there, by using the notion of semi-regular initial state introduced in the present paper.)

[2] In this case one can base the study on the property that the maximum swirl is a decreasing function of time. (See: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 194; p. 1893; 30 mai 1932). – Wolibner has also made this remark.

[`translator's note:` (reference provided by Shigeru Masuda, Tokyo): Wolibner, "Un Theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infinèment long", Math. Z. 37 (1933), 698-726, (footnote: mark (**) in p.698)

I. Préliminaires

1. *Notations*

Nous utiliserons la lettre Π' pour désigner un domaine arbitraire de points de l'espace; Π' pourra être l'espace tout entier, que nous désignerons par Π; ϖ désignera un domaine borné de points de Π, dont la frontière constitue une surface régulière σ.

Nous représenterons un point arbitraire de Π par x, ses cooronnées cartésiennes par x_i $(i = 1{,}2{,}3)$ sa distance à l'origine r_0, un element de volume qu'il engendre par δx, un element de surface qu'il engendre par δx_1, δx_2, δx_3. Nous désignerons de même par y un second point arbitraire de Π; r représentera toujours la distance des points nommés x et y.

Nous utileserons la convention << de l'indice muet>>: un term où un indice figure deux fois représentera la somme des termes obteunus en donnant à cet indice successivement les valeurs 1, 2, 3.

A partir du chapitre II le symbole A nous servira à désigner les constantes dont nous ne préciserons pas la valeur numérique.

Nous représenterons systématiquement par de grandes lettres les fonctions que nous supposerons seulement mesurables; par de petites lettres les fonctions qui sont continues ainsi que leurs dérivées premières.

2. *Rappelon l'inégalité de Schwarz:*

$$\left[\iiint_{\Pi'} U(x)V(x)\,\delta x\right]^2 \leq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x \times \iiint_{\Pi'} V^2(x)\,\delta x \tag{1.1}$$

– On est assuré que le premier membre a un sens quand le second est fini. –

Cette inégalité est à la base de toutes les propriétés énoncées au cours de ce chapitre.

Première application:

Si

$$U(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

on a:

$$\sqrt{\iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x} \leq \sqrt{\iiint_{\Pi'} V_1^2(x)\,\delta x} + \sqrt{\iiint_{\Pi'} V_2^2(x)\,\delta x};$$

I. Preliminaries

1. *Notation*

We use the letter Π' for an arbitrary domain of points in space. Π' may be the entire space, denoted by Π. ϖ will be a bounded domain in Π which has as boundary a regular surface σ. We represent an arbitrary point of Π by x, which has cartesian coordinates x_i $(i = 1, 2, 3)$ and distance r_0 to the origin, and generates volume element δx and surface element δx_1, δx_2, δx_3. Similarly we use y for a second arbitrary point of Π. r will always represent the distance between points named x and y.

We use the "silent index" convention: a term containing the same index twice represents the sum of terms obtained by successively giving that index the values 1, 2, 3.

Beginning with chapter II the symbol A denotes constants for which we do not specify the numerical value.

We systematically use capital letters for measurable functions and lower case letters for functions which are continuous and have continuous first partial derivatives.

2. *Recall the Schwarz inequality:*

$$\left[\iiint_{\Pi'} U(x)V(x)\,\delta x\right]^2 \leq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x \times \iiint_{\Pi'} V^2(x)\,\delta x \tag{1.1}$$

– The left side is defined whenever the right is finite. –

This inequality is the foundation of all properties stated in this chapter.

First application:

If

$$U(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

then

$$\sqrt{\iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x} \leq \sqrt{\iiint_{\Pi'} V_1^2(x)\,\delta x} + \sqrt{\iiint_{\Pi'} V_2^2(x)\,\delta x};$$

plus généralement si l'on a, t étant une constante:

$$U(x) = \int_0^t V(x, t')\, dt'$$

alors:

$$\sqrt{\iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x} \leq \int_0^t dt' \sqrt{\iiint_{\Pi'} V^2(x,t')\,\delta x} \tag{1.2}$$

les premiers membres de ces inégalités étant sûrement finis quand les seconds membres le sont.

Seconde application:

Soit n constantes λ_p et n vecteurs constantes $\vec{\alpha}_p$; désignons par $x+\vec{\alpha}_p$ le point obtenu en faisant subir à x la translation $\vec{\alpha}_p$; nous avons:

$$\iiint_{\Pi} \left[\sum_{p=1}^{p=n} \lambda_p U(x+\vec{\alpha}_p)\right]^2 \delta x < \left[\sum_{p=1}^{p=n} |\lambda_p|\right]^2 \times \iiint_{\Pi} U^2(x)\,\delta x;$$

(cette inégalité se démontre aisément en développant les deux carrés qui y figurent et en utilisant l'inégalité de Schwarz). On en déduit la suivante qui nous sera trés utile: Soit une fonction $H(z)$: nous désignerons par $H(y-x)$ la fonction que l'on obtient en substituant aux coordonées z_i de z les composantes $y_i - x_i$ du vecteur $\vec{xy}$; nous avons:

$$\iiint_{\Pi} \left[\iiint_{\Pi} H(y-x)U(y)\,\delta y\right]^2 \delta x < \left[\iiint_{\Pi} |H(z)|\,\delta z\right]^2 \times \iiint_{\Pi} U^2(y)\,\delta y; \tag{1.3}$$

et on est assuré que le premier membre est fini quand les deux intégrals qui figurent au second membre le sont.

3. *Forte convergence en moyenne.*[1]

Définition: On dit qu'une infinité de fonctions $U^*(x)$ a pour forte limite en moyenne sur un domaine Π' une fonction $U(x)$ quand:

---

[1] Voir: F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. T. 69 (1910). Delsarte, Mémorial des Sciences mathématiques, fasicule 57, Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert.

more generally for a constant t if one has

$$U(x) = \int_0^t V(x,t')\,dt'$$

then

$$\sqrt{\iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x} \leq \int_0^t dt' \sqrt{\iiint_{\Pi'} V^2(x,t')\,\delta x} \tag{1.2}$$

the left sides of these inequalities being finite when the right sides are.

Second application:

Consider n constants λ_p and n constant vectors $\vec{\alpha}_p$. Write $x+\vec{\alpha}_p$ for the translation of x by the vector $\vec{\alpha}_p$. We have

$$\iiint_{\Pi} \left[\sum_{p=1}^{p=n} \lambda_p U(x+\vec{\alpha}_p)\right]^2 \delta x \leq^* \left[\sum_{p=1}^{p=n} |\lambda_p|\right]^2 \times \iiint_{\Pi} U^2(x)\,\delta x;$$

(this inequality is easily proved by expanding the two squares and using the Schwarz inequality). From it, one deduces the following very useful one. Let $H(z)$ be a function. We denote by $H(y-x)$ the function obtained by substituting for coordinates z_i of z the components $y_i - x_i$ of the vector $\vec{xy}$. We have

$$\iiint_{\Pi} \left[\iiint_{\Pi} H(y-x)U(y)\,\delta y\right]^2 \delta x \leq^* \left[\iiint_{\Pi} |H(z)|\,\delta z\right]^2 \times \iiint_{\Pi} U^2(y)\,\delta y; \tag{1.3}$$

and the left side is finite when the two integrals on the right are finite.

3. *Strong convergence in mean.*[1]

Definition: One says that an infinity of functions $U^*(x)$ have function $U(x)$ as strong limit in mean on a domain Π' when:

---

[1] See: F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. vol 69 (1910). Delsarte, Mémorial des Sciences mathématiques, fasicule 57, Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert.

* `Translator's note:` The last two inequality signs appeared as "<" in the original.

$$\lim \iiint_{\Pi'} [U^*(x) - U(x)]^2 \, \delta x = 0. \tag{1.4}$$

On a alors quelle que soit la fonction $A(x)$ de carré sommable sur Π':

$$\lim \iiint_{\Pi'} U^*(x) A(x) \, \delta x = \iiint_{\Pi'} U(x) A(x) \, \delta x. \tag{1.5}$$

De (1.4) et (1.5) résulte

$$\lim \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x = \iiint_{\Pi'} U^2(x) \, \delta x. \tag{1.6}$$

Faible convergence en moyenne:

Définition: Une infinité de fonctions $U^*(x)$ a pour faible limite en moyenne sur un domaine Π' une fonction $U(x)$ quand les deux conditions suivantes se trouvent réalisées:

a) les nombres $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x$ sont bornés dans leur ensemble;

b) on a quelle que soit la fonction $A(x)$ de carré sommable sur Π':

$$\lim \iiint_{\Pi'} U^*(x) A(x) \, \delta x = \iiint_{\Pi'} U(x) A(x) \, \delta x.$$

Exemple I. La suite $\sin x_1$, $\sin 2x_1$, $\sin 3x_1$, $\ldots$ converge faiblement vers zéro sur tout domaine ϖ.

Exemple II. Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ admettant une fonction $U(x)$ comme forte limite en moyenne sure tout domaine ϖ, elle l'admet comme faible limite en moyenne sur Π quand les quantités $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x$ sont bournées dans leur ensemble.

Exemple III. Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ qui sur un domaine Π' convergent presque partout vers une fonction $U(x)$; cette fonction est leur faible limite en moyenne quand les quantités $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x$ sont bournées dans leur ensemble.

On a:

$$\lim \iiint_{\Pi_1{}'} \iiint_{\Pi_2{}'} A(x,y) U^*(x) V^*(y) \, \delta x \, \delta y = \iiint_{\Pi_1{}'} \iiint_{\Pi_2{}'} A(x,y) U(x) V(y) \, \delta x \, \delta y \tag{1.7}$$

$$\lim \iiint_{\Pi'} [U^*(x) - U(x)]^2 \, \delta x = 0. \tag{1.4}$$

One then has for any square summable function $A(x)$ on Π'

$$\lim \iiint_{\Pi'} U^*(x) A(x) \, \delta x = \iiint_{\Pi'} U(x) A(x) \, \delta x. \tag{1.5}$$

From (1.4) and (1.5)

$$\lim \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x = \iiint_{\Pi'} U^2(x) \, \delta x. \tag{1.6}$$

Weak convergence in mean:

Definition: An infinity of functions $U^*(x)$ has function $U(x)$ as weak limit in mean on domain Π' when the two following conditions hold.

a) the set of numbers $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x$ is bounded;

b) for all square summable functions $A(x)$ on Π'

$$\lim \iiint_{\Pi'} U^*(x) A(x) \, \delta x = \iiint_{\Pi'} U(x) A(x) \, \delta x.$$

Example I. The sequence $\sin x_1$, $\sin 2x_1$, $\sin 3x_1$, $\dots$ converges weakly to zero on all domains ϖ.

Example II. If an infinity of functions $U^*(x)$ have strong limit $U(x)$ in mean on all domains ϖ, then they admit a weak limit in mean on Π when the set of quantities $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x$ is bounded.

Example III. Let an infinity of functions $U^*(x)$ on a domain Π' converge almost everywhere to a function $U(x)$. That function is their weak limit in mean when the set of quantities $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x) \, \delta x$ is bounded.

One has

(1.7)
$$\lim \iiint_{\Pi_1'} \iiint_{\Pi_2'} A(x,y) U^*(x) V^*(y) \, \delta x \, \delta y = \iiint_{\Pi_1'} \iiint_{\Pi_2'} A(x,y) U(x) V(y) \, \delta x \, \delta y$$

quand on suppose que les $U^*(x)$ convergent faiblement en moyenne vers $U(x)$ sur ${\Pi_1}'$, les $V^*(x)$ vers $V(x)$ sur ${\Pi_2}'$ et que l'intégral

$$\iiint_{{\Pi_1}'} \iiint_{{\Pi_2}'} A^2(x)\,\delta x\,\delta y$$

est fini.

On a:

$$\lim \iiint_{\Pi'} A(x)U^*(x)V^*(x)\,\delta x = \iiint_{\Pi'} A(x)U(x)V(x)\,\delta x \tag{1.8}$$

quand on suppose, sur Π', $A(x)$ borné , $U(x)$ forte limite des $U^*(x)$ et $V(x)$ faible limite des $V^*(x)$.

Il est d'autre part évident que l'on a, si les fonctions $U^*(x)$ convergent faiblement en moyenne vers $U(x)$ sur un domaine ${\Pi_1}'$:

$$\lim\{\iiint_{\Pi'} [U^*(x) - U(x)]^2\,\delta x - \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x + \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x\} = 0;$$

d'où résultent l'inégalité:

$$\liminf \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x \geq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x, \tag{1.9}$$

et le *critère de forte convergence:*

Les fonctions $U^*(x)$ convergent fortement en moyenne sur le domaine Π' vers la fonction $U(x)$ quand elles convergent faiblement en moyenne vers cette fonction sur ce domaine et qu'en outre:

$$\limsup \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x \leq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x. \tag{1.10}$$

De même: Les composantes $U_i^*(x)$ d'un vecteur convergent fortement en moyenne sur le domaine Π' vers celles d'un vecteur $U_i(x)$ quand elles convergent faiblement en moyenne vers ces composantes sur ce domaine et qu'en outre[1]:

[1] Rappelons que le symbole $U_i(x)U_i(x)$ représent l'expression $\sum_{i=1}^{i=3} U_i(x)U_i(x)$.

when the $U^*(x)$ converge weakly in mean to $U(x)$ on ${\Pi_1}'$ and $V^*(x)$ to $V(x)$ on ${\Pi_2}'$ and the integral

$$\iiint_{{\Pi_1}'} \iiint_{{\Pi_2}'} A^2(x)\,\delta x\,\delta y$$

is finite. One has

$$\lim \iiint_{\Pi'} A(x)U^*(x)V^*(x)\,\delta x = \iiint_{\Pi'} A(x)U(x)V(x)\,\delta x \tag{1.8}$$

when on Π', $A(x)$ is bounded, $U(x)$ is the strong limit of the $U^*(x)$ and $V(x)$ is the weak limit of the $V^*(x)$.

It is also evident that, if the functions $U^*(x)$ converge weakly in mean to $U(x)$ on a domain ${\Pi_1}'$

$$\lim\{\iiint_{\Pi'} [U^*(x) - U(x)]^2\,\delta x - \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x + \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x\} = 0$$

from which one gets the inequality

$$\liminf \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x \geq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x \tag{1.9}$$

and the *criteria for strong convergence:*

The functions $U^*(x)$ converge strongly in mean on domain Π' to $U(x)$ when they converge weakly in mean to $U(x)$ on the domain and in addition

$$\limsup \iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x \leq \iiint_{\Pi'} U^2(x)\,\delta x. \tag{1.10}$$

Equivalently, the components $U_i^*(x)$ of the vector converge strongly in mean on domain Π' to those of a vector $U_i(x)$ when they converge weakly in mean to the components on the domain and in addition[1]

[1] Recall that the symbol $U_i(x)U_i(x)$ represents the expression $\sum_{i=1}^{i=3} U_i(x)U_i(x)$.

$$\text{(1.10}') \qquad \limsup \iiint_{\Pi'} U_i^*(x) U_i^*(x)\, \delta x \le \iiint_{\Pi'} U_i(x) U_i(x)\, \delta x.$$

Ce critère de faible convergence appliqué à l'Exemple III fournit la propriété suivante:

Lemme 1. Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ [ou de vecteurs $U_i^*(x)$] qui converge presque partout sur un domaine Π' vers une fonction $U(x)$ [ou un vecteur $U_i^*(x)$]; elles [ils] convergent fortement en moyenne vers cette limite quand l'inégalité (1.10) [ou (1.10')] est vérifiée.

Théoreme de F. Riesz: Une infinité de fonctions $U^*(x)$ possède une faible limite en moyenne sure un domaine Π' si les deux conditiones suivant sont vérifiées:

a) les nombres $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\, \delta x$ sont bornées dans leur ensemble;

b) pour chaque fonction $A(x)$ de carré sommable sur Π' les quantités $\iiint_c U^*(x) A(x)\, \delta x$ ont une seule valeur limite.

On peut substituer à la condition b) la suivante:

b') Pour chaque cube c dont les arètes sont parallèles aux axes de coordonnés et dont les sommets ont des coordonnées rationnelles les quantités $\iiint_{\Pi'} U^*(x)\, \delta x$ ont une seule valeur limite.

La démonstration de ce théoreme fait usage des travaux de M. Legesgue sure les fonctions sommables.

4.*Procédé diagonal de Cantor.*

Soit une infinité dénombrable de quantités dépendant chacune de l'indice entier n:a_n, b_n, $\ldots (n = 1, 2, 3 \ldots)$. Supposons les a_n bornés dans leur ensemble, les b_n bornés dans leur ensemble, etc. Le procédé de Cantor permet de trouver une suite d'entiers m_1, m_2, $\ldots$ telle que chacun des suites a_{m_1}, a_{m_2}, $\ldots$; b_{m_1}, b_{m_2}, $\ldots$; $\ldots$ converge vers une limite.

Rappelons brêvement quel est ce procédé: on construit une première suite d'entiers n_1^1, n_2^1, $n_3^1 \ldots$ telle que les quantités $a_{n_1^1}$, $a_{n_2^1}$, $a_{n_3^1}$, $\ldots$ convergent vers une limite; on constitue avec des éléments de cette première suite une seconde suite n_1^2, n_2^2, $n_3^2 \ldots$, telle que les quantités $b_{n_1^2}$, $b_{n_2^2}$, $b_{n_3^2}$, $\ldots$

$$(1.10') \qquad \limsup \iiint_{\Pi'} U_i^*(x)U_i^*(x)\,\delta x \leq \iiint_{\Pi'} U_i(x)U_i(x)\,\delta x.$$

The weak convergence criteria applied in Example III gives the following.

Lemma 1. If an infinity of functions $U^*(x)$ [or vectors $U_i^*(x)$] converge almost everywhere on domain Π' to a function $U(x)$ [or a vector $U_i^*(x)$] and satisfy inequality (1.10) [or (1.10')], then they converge strongly in mean.

Theorem of F. Riesz: An infinity of functions $U^*(x)$ have a weak limit in mean on domain Π' if the two following conditions are satisfied:

a) the set of numbers $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x$ is bounded;

b) for each square summable function $A(x)$ on Π' the quantities $\iiint_{\Pi'} U^*(x)A(x)\,\delta x$ have a single limiting value.

Condition b) may be replaced by the following:

b') for each cube c with sides parallel to the coordinate axes and rational vertices, the quantities $\iiint_c U^*(x)\,\delta x$ have a single limiting value.

The proof of this theorem makes use of the work of Lebesgue on summable functions.

4. *Cantor's diagonal method.*

Consider a countable infinity of quantities each dependent on integer indices n: a_n, b_n, $\ldots (n = 1, 2, 3\ldots)$. Suppose the a_n are bounded, the b_n are bounded, etc. Cantor's diagonal method allows us to find a sequence of integers m_1, m_2, ..., such that each of the sequences a_{m_1}, a_{m_2}, ...; b_{m_1}, b_{m_2}, ...; ... converge to a limit.

Recall this process briefly: one constructs a first sequence of integers n_1^1, n_2^1, n_3^1 ... such that the quantities $a_{n_1^1}$, $a_{n_2^1}$, $a_{n_3^1}$, ... converge to a limit; one then constructs using elements of the first sequence a second sequence n_1^2, n_2^2, n_3^2 ..., such that the quantities $b_{n_1^2}$, $b_{n_2^2}$, $b_{n_3^2}$, ...

converge vers une limite; etc. On choisit alors m_p égal à n_p^p, qui est le p^{ieme} terme de la diagonale du tableau infini des n_i^j.

Application: Du théoreme cité au parapraphe précédent résulte le suivant:

Théoreme fondamental de M. F. Riesz: Soit une infinité de fonctions $U^*(x)$ définie sur un domaine Π' et telles que les quantités $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x$ soient bornées dans leur ensemble; on peut toujours en extraire une suite illimité de fonctions possédant une faible limite en moyenne.

En effet la condition a) est satisfait et le Procédé diagonal de Cantor permet de construire une suite de fonctions $U^*(x)$ qui vérifient la condition b').

5.*Divers modes de continuité d'une fonction par rapport à un paramètre.*

Soit une fonction $U(x,t)$ dépendant d'un paramètre t. Nous dirons qu'elle est *uniformément continue* en t quand les trois conditions suivantes seront réalisées:

a) elle est continue par rapport à x_1, x_2, x_3, t;

b) pour chaque valeur particulière t_0 de t le maximum de $U(x,t_0)$ est fini;

c) étant donné un nombre positif ϵ, on peut trouver un nombre positif η tel que l'inégalité $|t-t_0|<\eta$ entraîne:

$$|U(x,t)-U(x,t_0)|<\epsilon.$$

Le maximum de $|U(x,t)|$ sur Π est alors une fontion continue de t.

Nous dirons que $U(x,t)$ est *fortement continue* en t quand, pour chaque valeur particulière t_0 de t, $\iiint_\Pi U^2(x,t_0)\,\delta x$ est fini et qu'on peut, étant donné ϵ, trouver η tel que l'inégalité $|t-t_0|<\eta$ entraîne:

$$\iiint_\Pi [U(x,t)-U(x,t_0)]^2\,\delta x<\epsilon.$$

L'intégral $\iiint_\Pi U^2(x,t_0)\,\delta x$ est donc une fonction continue de t. Inversement le lemme I nous apprend qu'une fonction $U(x,t)$ continue par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, t est fortement continue en t quand l'intégral précédent est une fonction continue de t.

converge to a limit; etc. One then chooses m_p equal to n_p^p, which is the p-th term of the diagonal of the infinite table of n_i^j.

Application: The following results from the theorem of the preceeding paragraph.

Fundamental theorem of F. Riesz Let an infinity of functions $U^*(x)$ on a domain Π' be such that the quantities $\iiint_{\Pi'} U^{*2}(x)\,\delta x$ are bounded. Then one can always extract from them a sequence of functions which have a weak limit in mean.

In fact condition a) is satisfied and Cantor's diagonal process allows construction of a sequence of functions $U^*(x)$ which satisfy condition b').

5. *Various modes of continuity of a function with respect to a parameter.*

Let a function $U(x,t)$ depend on a parameter t. We say it is *uniformly continuous* in t when the following three conditions hold:

a) it is continuous with respect to x_1, x_2, x_3, t;

b) for each particular value t_0 of t the maximum of $U(x,t_0)$ is finite;

c) given a positive number ϵ, one can find a positive η such that the inequality $|t-t_0| < \eta$ implies

$$|U(x,t) - U(x,t_0)| < \epsilon.$$

The maximum of $|U(x,t)|$ on Π is then a continuous function of t.

We say that $U(x,t)$ is *strongly continuous* in t when, for each particular value t_0 of t, $\iiint_\Pi U^2(x,t_0)\,\delta x$ is finite and for each ϵ there is η such that the inequality $|t-t_0| < \eta$ implies

$$\iiint_\Pi [U(x,t) - U(x,t_0)]^2\,\delta x < \epsilon.$$

The integral $\iiint_\Pi U^2(x,t_0)\,\delta x$ is therefore a continuous function of t. Conversely we learn from lemma 1 that a function $U(x,t)$ continuous with respect to variables x_1, x_2, x_3, t is strongly continuous in t when the preceeding integral is a continous function of t.

6. *Relations entre une fonction et ses dérivées*

Considérons deux fonctions $u(x)$ et $a(x)$ possédent des dérivées premières continues qui soient, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur Π. s étant la surface d'une sphère S dont le centre est l'origine et dont le rayon r_0 augmente indéfiniment, posons:

$$\varphi(r_0) = \iint_s u(x)a(x)\,\delta x_i;$$

nous avons:

$$\varphi(r_0) = \iiint_S \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}a(y)\right]\,\delta y.$$

La second expression de $\varphi(r_0)$ prouve que cette quantité tend vers une limite $\varphi(\infty)$ quand r_0 augmente indéfiniment. La première expression de $\varphi(r_0)$ nous donne:

$$|\varphi(r_0)| \leq \iint_s |u(x)a(x)|\frac{x_i\,\delta x_i}{r_0}$$

d'où:

$$\int_0^\infty |\varphi(r_0)|\,dr_0 \leq \iiint_\Pi |u(x)a(x)|\,\delta x.$$

Par suite $\varphi(\infty) = 0$; en d'autres termes:

$$\iiint_\Pi \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}a(y)\right]\,\delta y = 0; \tag{1.11}$$

il en résulte que plus généralement:

$$\iiint_{\Pi-\varpi} \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}a(y)\right]\,\delta y = -\iint_\sigma u(y)a(y)\,\delta y_i. \tag{1.12}$$

Choisissons comme domaine ϖ une sphère de rayon infiniment petit dont nous nommerons le centre x; faisons[1] dans (1.12) $a(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i}$; ajoutons les

[1] r représente la distance des points x et y.

6. *Relations between a function and its derivatives*

Consider two functions $u(x)$ and $a(x)$ with continuous first derivatives, with the functions and the first derivatives square summable on Π. s is the surface of a sphere S with center at the origin and for which the radius r_0 may become arbitrarily large. Let

$$\varphi(r_0) = \iint_s u(x)a(x)\,\delta x_i;$$

We have*

$$\varphi(r_0) = \iiint_S \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} a(y) \right] \delta y.$$

The second expression shows that $\varphi(r_0)$ tends to a limit $\varphi(\infty)$ when r_0 increases indefinitely. The first expression for $\varphi(r_0)$ gives us

$$|\varphi(r_0)| \leq \iint_s |u(x)a(x)| \frac{x_i\,\delta x_i}{r_0}$$

from which

$$\int_0^\infty |\varphi(r_0)|\,dr_0 \leq \iiint_\Pi |u(x)a(x)|\,\delta x.$$

As a result $\varphi(\infty) = 0$. In other words

$$\iiint_\Pi \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} a(y) \right] \delta y = 0 \tag{1.11}$$

and from this we have more generally

$$\iiint_{\Pi-\varpi} \left[u(y)\frac{\partial a(y)}{\partial y_i} + \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} a(y) \right] \delta y = -\iint_\sigma u(y)a(y)\,\delta y_i. \tag{1.12}$$

Choose as domain ϖ a sphere of infinitely small radius and center x and take[1] in (1.12) $a(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i}$; add the

---

[1] r is the distance between the points x and y.

*`translator's note:` It seems that δx_1 means dx_2dx_3 etc.

relations qui correspondent aux valeurs 1, 2, 3 de i; nous obtenons l'identité importante:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i} \, \delta y. \tag{1.13}$$

Si maintenant nous faison dans (1.11) $a(y) = \frac{y_i - x_i}{r^2} u(y)$ et si nous ajoutons les relations qui correspondent aux valeurs 1, 2, 3 de i, il vient:

$$2 \iiint_\Pi \frac{y_i - x_i}{r^2} \frac{\partial u}{\partial y_i} u(y) \, \delta y = - \iiint_\Pi \frac{1}{r^2} u^2(y) \, \delta y;$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz au premier membre de cette identité nous obtenons une inégalité qui nous sera utile:

$$\iiint_\Pi \frac{1}{r^2} u^2(y) \, \delta y \leq 4 \iiint_\Pi \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i} \, \delta y. \tag{1.14}$$

7. *Quasi-dérivées.*

Soit une infinité de fonctions $u^*(x)$ possédant des dérivées premières continues qui soient, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommable sur Π. Supposon que les dérivées $\frac{\partial u^*}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u^*}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u^*}{\partial x_3}$ convergent faiblement en moyenne sur Π vers des fonctions $U_{,1}$, $U_{,2}$, $U_{,3}$. Soit $U(x)$ la fonction mesurable définie presque partout par la relation:

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \iiint_\Pi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i} U_{,i}(y) \, \delta y.$$

Nous avons:

(1.15)
$$\iiint_\varpi [u^*(x) - U(x)]^2 \, \delta x = - \iiint_\Pi \iiint_\Pi K_{ij}(y, y') \left[\frac{\partial u^*}{\partial y_i} - U_{,i}(y) \right] \left[\frac{\partial u^*}{\partial {y_j}'} - U_{,j}(y') \right] \delta y \, \delta y'$$

en posant[1]:

---

[1] r' représente la distance des points x et y'.

relations for values 1, 2, 3 of i to obtain the important indentity

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i}\, \delta y. \tag{1.13}$$

We now take $a(y) = \frac{y_i - x_i}{r^2} u(y)$ in (1.11) and add these relations for values 1, 2, 3 of i, giving

$$2 \iiint_\Pi \frac{y_i - x_i}{r^2} \frac{\partial u}{\partial y_i} u(y)\, \delta y = - \iiint_\Pi \frac{1}{r^2} u^2(y)\, \delta y.$$

By applying the Schwarz inequality to the left side we get the useful inequality

$$\iiint_\Pi \frac{1}{r^2} u^2(y)\, \delta y \leq 4 \iiint_\Pi \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i}\, \delta y. \tag{1.14}$$

7. *Quasi-derivatives.*

Let $u^*(x)$ be an infinity of square summable functions with continuous square summable first derivatives on Π. Suppose that the derivatives $\frac{\partial u^*}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u^*}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u^*}{\partial x_3}$ converge weakly in mean on Π to functions $U_{,1}$, $U_{,2}$, $U_{,3}$. Let $U(x)$ be the measurable function defined almost everywhere by

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \iiint_\Pi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i} U_{,i}(y)\, \delta y.$$

We have

(1.15)
$$\iiint_\varpi [u^*(x) - U(x)]^2\, \delta x = - \iiint_\Pi \iiint_\Pi K_{ij}(y, y') \left[\frac{\partial u^*}{\partial y_i} - U_{,i}(y)\right] \left[\frac{\partial u^*}{\partial y_j{}'} - U_{,j}(y')\right] \delta y\, \delta y'$$

where[1]

[1] r' is the distance between the points x and y'.

$$K_{ij}(y,y') = \frac{1}{16\pi^2}\iiint_{\varpi} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i}\frac{\partial(\frac{1}{r'})}{\partial y_j{}'}\,\delta x;$$

cette expression de K permet d'établir aisément que l'intégrale

$$\iiint_\Pi \iiint_\Pi K_{ij}(y,y')K_{ij}(y,y')\,\delta y\,\delta y'$$

est finie; le seconde membre de (1.15) a donc bien un sens; et il tend vers zéro d'après la relation (1.7). Donc les fonctions $u^*(x)$ ont sur tout domaine ϖ une forte limite en moyenne: la fonction $U(x)$. Et, si les intégrals $\iiint_\Pi U^{*2}(x)\,\delta x$ sont bornées dans leur ensemble, $U(x)$ est sur Π faible limite en moyenne des fonctions $u^*(x)$ (Cf. §3. Exemple II, p. 199); on déduit alors de (I.11) l'égalité:

$$\iiint_\Pi \left[U(y)\frac{\partial a}{\partial y_i} + U_{,i}(y)a(y)\right]\,\delta y = 0. \tag{1.16}$$

Posons à ce propos la définition suivante:

Définition des quasi-dérivées: Soient deux fonctions de carrés sommables sur Π, $U(y)$ et $U_{,i}(y)$; nous dirons que $U_{,i}(y)$ est la quasi-dérivée de $U(x)$ par rapport à y_i quand la relation (1.16) sera vérifiée; rappelons que dans cette relation (1.16) $a(y)$ représente une quelconque des fonctions admettant des dérivées premières continues qui sont, comme ces fonctions elles-mêmes, de carrés sommables sur Π.

Résumons les résultats acquis au cours de ce paragraphe:

Lemme 2. Soit une infinité de fonctions $u^*(x)$ continues ainsi que leurs dérivées premières. Supposons les intégrales $\iiint_\Pi u^{*2}(x)\,\delta x$ bornée dans leur ensemble; supposons que chacune des dérivées $\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_i}$ ait sur Π une faible limite en moyenne $U_{,i}(x)$. Alors les fonctions $u^*(x)$ convergent en moyenne vers une fonction $U(x)$, dont les fonctions $U_{,i}(x)$ sont des quasi-dérivées; cette convergence est forte sure tout domaine ϖ; elle est faible[1] sur Π.

---

[1] Ou forte.

$$K_{ij}(y, y') = \frac{1}{16\pi^2} \iiint_{\varpi} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y_i} \frac{\partial(\frac{1}{r'})}{\partial y_j{}'} \, \delta x.$$

This expression for K allows an easy proof that the integral

$$\iiint_{\Pi} \iiint_{\Pi} K_{ij}(y, y') K_{ij}(y, y') \, \delta y \, \delta y'$$

is finite, so the right side of (1.15) is defined. It tends to zero by (1.7). Therefore the $u^*(x)$ have $U(x)$ as strong limit in mean on all domains ϖ. And, if the integrals $\iiint_{\Pi} U^{*2}(x) \, \delta x$ are bounded, $U(x)$ is the weak limit in mean of the $u^*(x)$ on Π (Cf. §3. Example II, p. 199). One then gets from (1.11) the equality

$$\iiint_{\Pi} \left[U(y) \frac{\partial a}{\partial y_i} + U_{,i}(y) a(y) \right] \delta y = 0. \tag{1.16}$$

We make the following definition:

Definition of quasi-derivatives: Consider two square summable functions $U(y)$ and $U_{,i}(y)$ on Π. We say that $U_{,i}(y)$ is the quasi-derivative of $U(x)$ with respect to y_i when (1.16) holds. Recall that in (1.16) $a(y)$ is any square summable function with continuous square summable first derivatives on Π.

Let us summarize the results of preceeding paragraph.

Lemma 2. Suppose we have an infinity of continuous functions $u^*(x)$ with continuous first derivatives. Suppose the integrals $\iiint_{\Pi} u^{*2}(x) \, \delta x$ are bounded and that each of the derivatives $\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_i}$ has a weak limit in mean $U_{,i}(x)$ on Π. Then the $u^*(x)$ converge in mean to a function $U(x)$ for which the $U_{,i}(x)$ are the quasi-derivatives. This convergence is strong on all domains ϖ. It is weak[1] on Π.

[1] Or strong.

De même que nous avons défini les quasi-dérivées, nous allons définir comme suit la *quasi-divergence* $\Theta(x)$ d'un vecteur $U_i(x)$ dont les composants sont de carrés sommables sur Π: c'est, quand elle existe, une fonction de carré sommable vérifiant la relation:

$$\iiint_\Pi \left[U_i(y)\frac{\partial a}{\partial y_i} + \Theta(y)a(y)\right]\delta y = 0. \tag{1.17}$$

8. *Approximation d'une fonction mesurable par une suite de fonctions régulières.* Soit une quantité positive arbitraire ϵ. Choisissons[1] une fonction $\lambda(s)$ continue, positive, définie pour $0 \leq s$, identique à zéro pour $1 \leq s$, possédant des dérivées de tous les ordres et telle que:

$$4\pi \int_0^1 \lambda(\sigma^2)\sigma^2\, d\sigma = 1.$$

$U(x)$ étant une fonction sommable sur tout domaine ϖ, nous poserons

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{\epsilon^3}\iiint_\Pi \lambda\left(\frac{r^2}{\epsilon^2}\right) U(y)\,\delta y \tag{1.18}$$

($r =$ distance des points x et y)

Cette fonction $\overline{U(x)}$ possède des dérivées do tous les ordres:

$$\frac{\partial^{l+m+n}\overline{U(x)}}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^n} = \frac{1}{\epsilon^3}\iiint_\Pi \frac{\partial^{l+m+n}\lambda\left(\frac{r^2}{\epsilon^2}\right)}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^n} U(y)\,\delta y. \tag{1.19}$$

Supposons $U(x)$ bornée sur Π; nous avons manifestement:

$$\textit{minimum de } U(x) \leq \overline{U(x)} \leq \textit{maximum de } U(x). \tag{1.20}$$

Suppossons $U(x)$ de carré sommable sur Π; l'inégalité (1.3) appliquée à (1.18) nous donne:

$$\iiint_\Pi \overline{U(x)^2}\,\delta x < \iiint_\Pi U^2(x)\,\delta x; \tag{1.21}$$

[1] Pour fixer les idées nous prendrons $\lambda(s) = Ae^{\frac{1}{s-1}}$, A étant une constante convenable, pour $0 < s < 1$.

Following our definition of quasi-derivatives we are going to define the *quasi-divergence* $\Theta(x)$ of a vector $U_i(x)$ with square summable components on Π. When it exists, it is a square summable function with

$$\iiint_\Pi \left[U_i(y)\frac{\partial a}{\partial y_i} + \Theta(y)a(y)\right]\delta y = 0. \tag{1.17}$$

8. *Approximation of a measurable function by a sequence of regular functions.* Let $\epsilon > 0$. We choose a positive continuous function $\lambda(s)$ defined for $0 \leq s$, identically zero for $1 \leq s$ and having derivatives of all orders such that

$$4\pi \int_0^1 \lambda(\sigma^2)\sigma^2\, d\sigma = 1.$$

If $U(x)$ is summable on all domains ϖ, let

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{\epsilon^3}\iiint_\Pi \lambda\left(\frac{r^2}{\epsilon^2}\right) U(y)\,\delta y \tag{1.18}$$

(r = distance between x and y)

$\overline{U(x)}$ has derivatives of all orders

$$\frac{\partial^{l+m+n}\overline{U(x)}}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^n} = \frac{1}{\epsilon^3}\iiint_\Pi \frac{\partial^{l+m+n}\lambda\left(\frac{r^2}{\epsilon^2}\right)}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^n} U(y)\,\delta y. \tag{1.19}$$

If $U(x)$ is bounded on Π then we clearly have

$$\min U(x) \leq \overline{U(x)} \leq \max U(x). \tag{1.20}$$

If $U(x)$ is square summable on Π the inequality (1.3) applied to (1.18) gives*

$$\iiint_\Pi \overline{U(x)}^2\,\delta x \leq \iiint_\Pi U^2(x)\,\delta x. \tag{1.21}$$

---

[1] To fix ideas we take $\lambda(s) = Ae^{\frac{1}{s-1}}$, A any suitable constant, $0 < s < 1$.

* [`translator's note:` The bar was extended too far in the original.]

appliquée à (1.19) elle prouve que les dérivées partielles de $\overline{U(x)}$ sont de carrés sommables sur Π.

Notons enfin que nous avons, si $U(x)$ et $V(x)$ sont de carrés sommables sur Π:

$$\iiint_{\Pi} \overline{U(x)} V(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi} U(x) \overline{V(x)}\, \delta x. \tag{1.22}$$

Si $V(x)$ est continue, $\overline{V(x)}$ tend uniformément vers $V(x)$ sur tout domaine ϖ quand ϵ tend vers zéro; on a alors d'après (1.22):

$$\lim \iiint_{\Pi} \overline{U(x)} V(x)\, \delta x = \iiint_{\Pi} U(x) V(x)\, \delta x;$$

on en déduit que sur Π $\overline{U(x)}$ convergent faiblement en moyenne vers $U(x)$ quand ϵ tend vers zéro; l'inégalité (1.21) et le critère de forte convergence énoncé p. 200 autorisent même une conclusion plus précise:

Lemme 3. Soit une fonction $U(x)$ de carrés sommables sur Π; $\overline{U(x)}$ converge sur Π fortement en moyenne vers $U(x)$ quand ϵ tend vers zéro.

On établit de même la proposition suivante:

Généralization du lemme 3. Soit une suite de fonctions $U_\epsilon(x)$ qui sur Π convergent fortement (ou faiblement) vers une limite $U(x)$ quand ϵ tend vers zéro; les fonctions $\overline{U_\epsilon(x)}$ convergent fortement (ou faiblement) ver cette même limite.

9. *Quelques lemmes concernant les quasi-dérivées.*

Soit une fonction $U(x)$ de carré sommable sur Π; supposons

$$\iiint_{\Pi} U(x) a(x)\, \delta x = 0$$

quelle que soit la fonction $a(x)$ de carré sommable sur Π dont les dérivées de tous les ordres existent et sont de carrés sommables sur Π; nous avons alors:

$$\iiint_{\Pi} U(x) \overline{U(x)}\, \delta x = 0$$

The same applied to (1.19) proves that the partial derivatives of $\overline{U(x)}$ are square summable on Π.

Finally note that we have, if $U(x)$ and $V(x)$ are square summable on Π

$$\iiint_\Pi \overline{U(x)}V(x)\,\delta x = \iiint_\Pi U(x)\overline{V(x)}\,\delta x. \tag{1.22}$$

If $V(x)$ is continuous $\overline{V(x)}$ tends uniformly to $V(x)$ on all domains ϖ when ϵ tends to zero. One therefore has from (1.22)

$$\lim \iiint_\Pi \overline{U(x)}V(x)\,\delta x = \iiint_\Pi U(x)V(x)\,\delta x.$$

From this one deduces that $\overline{U(x)}$ converges weakly in mean to $U(x)$ on Π when ϵ approaches zero. Inequality (1.21) and the criteria for strong convergence on p. 200 similarly give a more precise conclusion:

Lemma 3. Let $U(x)$ be square summable on Π. $\overline{U(x)}$ converges strongly in mean to $U(x)$ on Π when ϵ tends to zero.

Similarly one establishes the following proposition.

Generalization of lemma 3. Suppose a sequence of functions $U_\epsilon(x)$ converge strongly (or weakly) in mean on Π to a limit $U(x)$ as ϵ tends to zero. Then the functions $\overline{U_\epsilon(x)}$ converge strongly (or weakly) to the same limit.

9. *Some lemmas on quasi-derivatives.*

Let $U(x)$ be square summable on Π. Suppose that for all square summable functions $a(x)$ having square summable derivatives of all orders

$$\iiint_\Pi U(x)a(x)\,\delta x = 0$$

then

$$\iiint_\Pi U(x)\overline{U(x)}\,\delta x = 0$$

d'où, en faisant tendre ϵ vers zéro:

$$\iiint_\Pi U^2(x)\,\delta x = 0.$$

La fonction $U(x)$ est donc nulle presque partout.

Ce fait permet d'établir les propositions suivantes: La quasi-dérivée d'une fonction par rapport à la variable x_i est unique quand elle existe. (Nous considérons comme identique deus fonctions égales presque partout.)

La quasi-divergence d'un vecteur est unique quand elle existe.

Lemme 4. Soit une fonctions $U(x)$ admettant une quasi-dérivée $U_{,i}(x)$; je dis que $\frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} = \overline{U_{,i}(x)}$.

Il suffit de prouver que:

$$\iiint_\Pi \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} a(x)\,\delta x = \iiint_\Pi U_{,i}(x) a(x)\,\delta x.$$

Or on déduit aisément de (1.18) que:

$$\frac{\partial \overline{a(x)}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}};$$

cette formule et les formules (1.11), (1.16), (1.22) justifient les transformations:

$$\iiint_\Pi \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} a(x)\,\delta x = -\iiint_\Pi \overline{U(x)} \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\,\delta x = -\iiint_\Pi U(x) \overline{\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\right)}\,\delta x =$$

$$-\iiint_\Pi U(x) \frac{\partial \overline{a(x)}}{\partial x_i}\,\delta x = \iiint_\Pi U_{,i}(x)\overline{a(x)}\,\delta x = \iiint_\Pi \overline{U_{,i}(x)} a(x)\,\delta x. \qquad C.Q.F.D.$$

Lemme 5. Soient deux fonctions de carrés sommables sur Π, $U(x)$ et $V(x)$, qui possèdent les quasi-dérivées $U_{,i}(x)$ et $V_{,i}(x)$; je dis que:

$$\iiint_\Pi [U(x)V_{,i}(x) + U_{,i}(x)V(x)]\,\delta x = 0. \tag{1.23}$$

Cette formule s'obtient en appliquant le lemme 3 à la formule:

$$\iiint_\Pi [U(x)\overline{V_{,i}(x)} + U_{,i}(x)\overline{V(x)}]\,\delta x = 0.$$

qui elle-même résulte de la relation (1.16) et du lemme 4.

from which one gets as ϵ tends to zero

$$\iiint_\Pi U^2(x)\,\delta x = 0.$$

The function $U(x)$ is therefore zero almost everywhere.

That fact allows us to establish the following propositions. 1) When the quasi-derivative of a function with respect to x_i exists, it is unique. (We consider two functions identical if they are equal almost everywhere.) 2) The quasi-divergence of a vector is unique if it exists.

Lemma 4. Let $U(x)$ have a quasi-derivative $U_{,i}(x)$. Then I claim that $\frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} = \overline{U_{,i}(x)}$.

It suffices to prove that

$$\iiint_\Pi \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} a(x)\,\delta x = \iiint_\Pi U_{,i}(x)a(x)\,\delta x.$$

Because one easily deduces from (1.18) that

$$\frac{\partial \overline{a(x)}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}}$$

and this formula with (1.11), (1.16), and (1.22) justify the transformations

$$\iiint_\Pi \frac{\partial \overline{U(x)}}{\partial x_i} a(x)\,\delta x = -\iiint_\Pi \overline{U(x)}\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\,\delta x = -\iiint_\Pi U(x)\overline{\left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\right)}\,\delta x =$$

$$-\iiint_\Pi U(x)\frac{\partial \overline{a(x)}}{\partial x_i}\,\delta x = \iiint_\Pi U_{,i}(x)\overline{a(x)}\,\delta x = \iiint_\Pi \overline{U_{,i}(x)}a(x)\,\delta x. \qquad Q.E.D.$$

Lemma 5. Suppose that two square summable functions $U(x)$ and $V(x)$ have quasi-derivatives $U_i(x)$ and $V_i(x)$ on Π. I claim that

$$\iiint_\Pi [U(x)V_{,i}(x) + U_{,i}(x)V(x)]\,\delta x = 0. \tag{1.23}$$

This is obtained by applying lemma 3 to the formula

$$\iiint_\Pi [U(x)\overline{V_{,i}(x)} + U_{,i}(x)\overline{V(x)}]\,\delta x = 0.$$

which follows from (1.16) and lemma 4.

Lemme 6. Soit un vecteur $U_i(x)$ admettant une quasi-divergence $\Theta(x)$; on a: divergence $\overline{U_i(x)} = \overline{\Theta(x)}$.

(La démonstration de ce lemme est très analogue à celle du lemme 4).

Lemme 7. Soit un vecteur $U_i(x)$ de quasi-divergence nulle. Supposons

$$\iiint_{\Pi} U_i(x) a_i(x)\, \delta x = 0$$

quel que soit le vecteur $a_i(x)$, de divergence nulle, dont les composantes ainsi que leurs dérivées de tous les ordres sont de carrés sommables sur Π. Je dis que $U_i(x) = 0$.

En effet le lemme 4 nous autorise à choisir $a_i(x) = \overline{U_i(x)}$; or quand ϵ tend vers zéro la relation $\iiint_{\Pi} U_i(x)\overline{U_i(x)}\, \delta x = 0$ se réduit à la suivante:

$$\iiint_{\Pi} U_i(x) U_i(x)\, \delta x = 0.$$

Corollaire. Une infinité de vecteurs $U_i^*(x)$, de quasi-divergence nulle, possède sur Π une faible limite en moyenne unique si les deus conditions suivantes sont vérifiées:

a) Les nombres $\iiint_{\Pi} U_i^*(x) U_i^*(x)\, \delta x$ sont bornés dans leurs ensemble;

b) Pour chaque vecteur $a_i(x)$ de divergence nulle, dont les composantes, ainsi que leurs dérivées de tous les oedres, sont de carrés sommables sur Π, les quantités $\iiint_{\Pi} U_i^*(x) a_i(x)\, \delta x$ ont une seule valeur limite.

Sinon le Théorem fondamental de M. F. Riesz (p. 202) permettrait d'extraire de la suite $U_i^*(x)$ deus suites partielles possédant deux faibles limites distinctes, dont l'existence contredireit le lemme 7.

II. Mouvements infiniment lents.

10. On désigne par << équations de Navier linéarisées >> les équations suivantes:

(2.1)

$$\nu \Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = -X_i(x,t) \left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right]$$

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0.$$

Lemma 6. If a vector $U_i(x)$ has quasi-divergence $\Theta(x)$ then the divergence of $\overline{U_i(x)} = \overline{\Theta(x)}$.

(The proof is very much analogous to that of lemma 4.)

Lemma 7. Suppose a vector $U_i(x)$ has quasi-divergence 0, and that

$$\iiint_\Pi U_i(x)a_i(x)\,\delta x = 0$$

for all square summable vectors $a_i(x)$ which have 0 divergence and square summable derivatives of all orders on Π. Then I claim that $U_i(x) = 0$.

In fact lemma 4 allows us to choose $a_i(x) = \overline{U_i(x)}$ because when ϵ tends to 0 the relation $\iiint_\Pi U_i(x)\overline{U_i(x)}\,\delta x = 0$ reduces to

$$\iiint_\Pi U_i(x)U_i(x)\,\delta x = 0.$$

Corollary. An infinity of vectors $U_i^*(x)$, of quasi-divergence 0 has, on Π, a unique weak limit in mean if the two following conditions hold:

a) the numbers $\iiint_\Pi U_i^*(x)U_i^*(x)\,\delta x$ are bounded

b) for all square summable vectors $a_i(x)$ which have 0 divergence and square summable derivatives of all orders on Π, the quantities $\iiint_\Pi U_i^*(x)a_i(x)\,\delta x$ have a single limiting value.

If not, then the fundamental theorem of F. Riesz (p. 202) allows extraction from the sequence $U_i^*(x)$ two subsequences having distinct limits. This contradicts lemma 7.

II. Infinitely slow motion.

10. The "linearised Navier equations" are the following

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = -X_i(x,t)\ \left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right] \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0.$$

ν et ρ sont les constantes données, $X_i(x,t)$ est un vecteur donné qui représente les forces extérieures; $p(x,t)$ représente la pression, $u_i(x,t)$ la vitesse des molécules du liquide.

Le probléme que pose la théorie des liquides visqueux est le suivant:

Construire pour $t > 0$ la solution de (2.1) qui correspond à des valeurs initiales données, $u_i(x,0)$.

Nous allons rappeler la solution de ce problème et quelques-unes des propriétés qu'elle possède. Nous posserons:

$$W(t) = \iiint_\Pi u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x$$

$$J_m^2(t) = \iiint_\Pi \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \dots} \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \dots}\,\delta x.$$

$V(t) =$ Maximum de $\sqrt{u_i(x,t)u_i(x,t)}$ à l'instant t.

$D_m(t) =$ Maximum des fonctions $\left|\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right|$ à l'instant t $(h+k+l=m)$.

Nous ferons les hypothèses suivantes relativement aux données: Les fonctions $u_i(x,t)$ et leurs dérivées premières sont continues; $\frac{\partial u_j(x,0)}{\partial x_j} = 0$; les quantités $W(0)$ et $V(0)$ sont finies; $|X_i(x,t) - X_i(y,t)| < r^{\frac{1}{2}} C(x,y,t)$, $C(x,y,t)$ étant une fonction continue; $\iiint_\Pi X_i(x,t)X_i(x,t)\,\delta x$ est une fonction continue de t, ou est inférieure à une fonction continue de t.

Les lettres A et A_m nous serviront désormais à désigner les constantes et les fonctions de l'indice m dont nous ne préciserons pas les valeurs numériques.

11. *Premier cas particulier:* $X_i(x,t) = 0$.

La théorie de la Chaleur fournit dans ce cas la solution suivante du système (2.1):

$$u_i'(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,0)\,\delta y; \quad p'(x,t) = 0. \tag{2.2}$$

Les intégrales $u_i'(x,t)$ sont uniformément continues en t (cf. §5, p. 202) pour $0 < t$, et l'on a:

ν and ρ are given constants, $X_i(x,t)$ is a vector which represents external forces, $p(x,t)$ is the pressure, and $u_i(x,t)$ the speed of the molecules of the liquid.

The problem posed by the theory of viscous liquids is the following: Construct for $t > 0$ the solution of (2.1) which has given initial values $u_i(x,0)$.

We recall the solution of this problem and some of its properties. Write

$$W(t) = \iiint_\Pi u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x$$

$$J_m^2(t) = \iiint_\Pi \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots}\,\delta x.$$

$V(t) =$ Maximum of $\sqrt{u_i(x,t)u_i(x,t)}$ at time t.

$D_m(t) =$ Maximum of the function $\left|\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right|$ at time t $(h+k+l=m)$.

We make the following assumptions: The functions $u_i(x,t)$ and their first derivatives are continuous, $\frac{\partial u_j(x,0)}{\partial x_j} = 0$, the quantities $W(0)$ and $V(0)$ are finite, $|X_i(x,t) - X_i(y,t)| < r^{\frac{1}{2}} C(x,y,t)$, where $C(x,y,t)$ is a continuous function, and $\iiint_\Pi X_i(x,t)X_i(x,t)\,\delta x$ is a continuous function of t, or is less than a continuous function of t.

From now on the letters A and A_m denote constants and functions with index m for which we do not specify the numerical value.

11. *First case:* $X_i(x,t) = 0$.

The theory of heat gives the following solution* to system (2.1):

$$u_i'(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,0)\,\delta y; \quad p'(x,t) = 0. \tag{2.2}$$

The integrals $u_i'(x,t)$ are uniformly continuous in t (cf. §5, p. 202) for $0 < t$, and from this one has

[**translator's note:** where $r = |y - x|$.

$$V(t) < V(0). \tag{2.3}$$

Quand $J_1(0)$ est fini, l'appliction de l'inégalité (1.14) et de l'inégalité de Schwarz (1.1) à (2.2) permet d'obtenir une seconde borne de $V(t)$:

$$V^2(t) < 4J_1^2(0)\frac{1}{(4\pi)^3}\iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{r^2}{2\nu t}}}{(\nu t)^3} r^2\,\delta y,$$

c'est-à-dire:

$$V(t) < \frac{AJ_1(0)}{(\nu t)^{\frac{1}{4}}}. \tag{2.4}$$

L'inégalité (1.3) appliquée à (2.2) prouve que l'on a:

$$W(t) < W(0) \tag{2.5}$$

les intégrales $u_i'(x,t)$ sont fortement continues en t (cf. §5, p. 202) même pour $t = 0$. Appliquée à la relation:

$$\frac{\partial u_i'(x,t)}{\partial x_k} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_\Pi \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}}\right] u_i(y,0)\,\delta y$$

cette inégalité (1.3) prouve que:

$$J_1(t) < J_1(0); \tag{2.6}$$

les dérivées prémières $\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ sont fortement continues en t, même pour $t = 0$ si $J_1(0)$ est fini.

Pour les raisons analogues les dérivées de tous les ordres des intégrales $u_i'(x,t)$ sont uniformément et fortement continues en t pour $t > 0$; et plus précisément:

$$D_m(t) < \frac{A_m\sqrt{W(0)}}{(\nu t)^{\frac{2m+3}{4}}}, \tag{2.7}$$

$$J_m(t) < \frac{A_m\sqrt{W(0)}}{(\nu t)^{\frac{m}{2}}}. \tag{2.8}$$

12. *Second cas particulier;* $u_i'(x,0) = 0$.

La solution fondamental de M. Oseen[1], $T_{ij}(x,t)$, fournit la solution suivante du système (2.1):

[1] Voir: Oseen: Hydrodynamik §5; Acta mathematice T. 34.

$$V(t) < V(0). \tag{2.3}$$

If $J_1(0)$ is finite, inequality (1.14) and the Schwarz inequality (1.1) applied to (2.2) give a second bound on $V(t)$:

$$V^2(t) < 4J_1^2(0)\frac{1}{(4\pi)^3}\iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{2\nu t}}}{(\nu t)^3} r^2\,\delta y,$$

which is to say

$$V(t) < \frac{AJ_1(0)}{(\nu t)^{\frac{1}{4}}}. \tag{2.4}$$

Inequality (1.3) applied to (2.2) proves:

$$W(t) < W(0); \tag{2.5}$$

the integrals $u_i'(x,t)$ are strongly continuous in t (cf. §5, p. 202) including $t = 0$. Inequality (1.3) applied to

$$\frac{\partial u_i'(x,t)}{\partial x_k} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_\Pi \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}}\right] u_i(y,0)\,\delta y$$

proves that

$$J_1(t) < J_1(0); \tag{2.6}$$

the first derivatives $\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}$ are strongly continuous in t, including $t = 0$ if $J_1(0)$ is finite.

For analogous reasons the derivatives of all orders of $u_i'(x,t)$ are uniformly and strongly continuous in t for $t > 0$ and more precisely

$$D_m(t) < \frac{A_m\sqrt{W(0)}}{(\nu t)^{\frac{2m+3}{4}}}, \tag{2.7}$$

$$J_m(t) < \frac{A_m\sqrt{W(0)}}{(\nu t)^{\frac{m}{2}}}. \tag{2.8}$$

12. *Second particular case* $u_i'(x,0) = 0$.

Oseen's fundamental solution[1], $T_{ij}(x,t)$, furnishes the following solution to system (2.1):

---

[1] See: Oseen: Hydrodynamik §5; Acta mathematica vol. 34.

[`translator's note:` which gives on p. 41

$t_{jk} = \delta_{jk}\frac{1}{2\nu}\frac{E(r,t^{(0)}-t)}{t^{(0)}-t} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}$, $\Phi = \frac{1}{r}\int_0^r E(\alpha,t^{(0)}-t)\,d\alpha$, $E(r,t^{(0)}-t) = \frac{e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\nu(t^{(0)}-t)}}}{\sqrt{t^{(0)}-t}}$.]

(2.9)

$$u_i''(x,t) = \int_0^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y, t-t') X_j(y,t')\,\delta y$$
$$p''(x,t) = -\frac{\rho}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\iiint_\Pi \frac{1}{r} X_j(y,t)\,\delta y$$

Nous avons:

(2.10)

$$|T_{ij}(x-y,t-t')| < \frac{A}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{3}{2}}};$$
$$\left|\frac{\partial^m T_{ij}(x-y,t-t')}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right| < \frac{A_m}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{m+3}{2}}}; (t'<t).$$

Nous remarquerons en premier lieu que les intégrals (1.2) et (1.3) appliquées en même temps que (2.10) à la formule:

$$\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} = \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial T_{ij}(x-y,t-t')}{\partial x_k} X_j(y,t')\,\delta y \tag{2.11}$$

prouvent que les dérivées premières $\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}$ sont fortement continues en t pour $t \geq 0$, et que:

$$J_1(t) < A \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t') X_i(x,t')\,\delta x}. \tag{2.12}$$

Ceci fait, adjoignons aux hypothéses déjà énoncées la suivante: le maximum de $\sqrt{X_i(x,t')X_i(x,t')}$ à l'instant t est une fonction continue de t, ou est inférieur à une fonction continue de t; il n'y a aucune difficulté à déduire de (2.9) que $u_i''(x,t)$ et $\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}$ sont alors uniformément continue en t pour $t \geq 0$, et à préciser par exemple que

$$D_1(t) < A \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \max \sqrt{X_i(x,t')X_i(x,t')}; \tag{2.13}$$

cette inégalité (2.13) peut être complétée comme suit: nous avons

$$u_i''(x,t) = \int_0^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y, t-t') X_j(y,t')\,\delta y \tag{2.9}$$

$$p''(x,t) = -\frac{\rho}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\iiint_\Pi \frac{1}{r} X_j(y,t)\,\delta y$$

We have

$$|T_{ij}(x-y,t-t')| < \frac{A}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{3}{2}}} \tag{2.10}$$

$$\left|\frac{\partial^m T_{ij}(x-y,t-t')}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right| < \frac{A_m}{[r^2+\nu(t-t')]^{\frac{m+3}{2}}};\quad (t'<t).$$

We remark in the first place that integrals (1.2) and (1.3) applied with (2.10) to the formula

$$\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} = \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial T_{ij}(x-y,t-t')}{\partial x_k} X_j(y,t')\,\delta y \tag{2.11}$$

prove that the first derivatives $\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}$ are strongly continuous in t for $t \geq 0$, and that

$$J_1(t) < A\int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}}\sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\,\delta x}. \tag{2.12}$$

This done, we add to previously stated hypotheses the assumption that the maximum of $\sqrt{X_i(x,t')X_i(x,t')}$ at time t is a continuous function of t, or is less than a continuous function of t. Then there is no difficulty in deducing from (2.9) that $u_i''(x,t)$ and $\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}$ are uniformly continuous in t for $t \geq 0$, and more precisely for example

$$D_1(t) < A\int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \max\sqrt{X_i(x,t')X_i(x,t')}. \tag{2.13}$$

Inequality (2.13) may be complemented as follows. We have

$$\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i''(y,t)}{\partial y_k} = \int_0^t dt' \iiint_{\varpi} \frac{\partial T_{ij}(x-z,t-t')}{\partial x_k} X_j(z,t')\,\delta z$$
$$- \int_0^t dt' \iiint_{\varpi} \frac{\partial T_{ij}(y-z,t-t')}{\partial y_k} X_j(z,t')\,\delta z$$

$$+ \int_0^t dt' \iiint_{\Pi-\varpi} \left[\frac{\partial T_{ij}(x-z,t-t')}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}(y-z,t-t')}{\partial y_k} \right] X_j(z,t')\,\delta z,$$

ϖ étant le domaine des points z situés à une distance de x ou de y inférieure à $2r$; appliquons la formule des accroissements finis au crochet:

$$\left[\frac{\partial T_{ij}(x-z,t-t')}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}(y-z,t-t')}{\partial y_k} \right]$$

et majorons les trois intégrales précédentes en remplaçant les diverses fonctions qui y figurent par des majorantes de leurs valeurs absolues; nous vérifions aisément que:

$$\left| \frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i''(y,t)}{\partial y_k} \right| < \tag{2.14}$$
$$< A r^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} \max \sqrt{X_i(x,t')X_i(x,t')}.$$

— Nous dirons *qu'une fonction* $U(x,t)$ *satisfait une condition* H quand elle vérifie une inégalité analogue à la précédente:

$$|U(x,t) - U(y,t)| < r^{\frac{1}{2}} C(t), \tag{2.15}$$

oú $C(t)$ est inférieur à une fonction continue de t. Nous nommerons coefficient de la condition H celle des fonctions $C(t)$ dont les valeurs sont les plus faibles possibles. —

Supposons maintenant que les fonctions $X_i(x,t)$ satisfassent une telle condition H, de coefficient $C(t)$; les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_i''(x,t)}{\partial x_k \partial x_l}$, qui sont données par les formules:

$$\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i''(y,t)}{\partial y_k} = \int_0^t dt' \iiint_{\varpi} \frac{\partial T_{ij}(x-z,t-t')}{\partial x_k} X_j(z,t')\,\delta z$$
$$- \int_0^t dt' \iiint_{\varpi} \frac{\partial T_{ij}(y-z,t-t')}{\partial y_k} X_j(z,t')\,\delta z$$

$$+ \int_0^t dt' \iiint_{\Pi-\varpi} \left[\frac{\partial T_{ij}(x-z,t-t')}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}(y-z,t-t')}{\partial y_k}\right] X_j(z,t')\,\delta z,$$

ϖ being the domain of points at distance less than $2r$ to x or y. We apply the formula of finite differences to the bracket

$$\left[\frac{\partial T_{ij}(x-z,t-t')}{\partial x_k} - \frac{\partial T_{ij}(y-z,t-t')}{\partial y_k}\right]$$

and majorize the preceeding three integrals by replacing the various functions there by the majorants of their absolute values. We easily verify

$$\left|\frac{\partial u_i''(x,t)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i''(y,t)}{\partial y_k}\right| < \tag{2.14}$$

$$< Ar^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}} \max \sqrt{X_i(x,t')X_i(x,t')}.$$

— We say that *a function $U(x,t)$ satisfies condition H* if an inequality analogous to the preceeding holds:

$$|U(x,t) - U(y,t)| < r^{\frac{1}{2}} C(t), \tag{2.15}$$

where $C(t)$ is smaller than a continuous function of t. We call the weakest possible $C(t)$, the condition H coefficient. —

Now suppose that the functions $X_i(x,t)$ satisfy condition H with coefficient $C(t)$. Then the second derivatives $\frac{\partial^2 u_i''(x,t)}{\partial x_k \partial x_l}$, given by the formulas

$$\frac{\partial^2 u_i''(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} = \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial^2 T_{ij}(x-y,t-t')}{\partial x_k \partial x_l} [X_j(y,t') - X_j(x,t')]\, \delta y$$

sont alors des fonctions uniformément continues en t, et l'on à:

$$D_2(t) < A \int_0^t \frac{C(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.16}$$

Plus généralement:

Supposons que les dérivées d'ordre m des fonctions $X_i(x,t)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 existent, soient continues et soient inférieures en valeur absolue à une fonctions continue $\varphi_m(t)$. Alors les dérivées d'ordre $m+1$, par rapport à x_1, x_2, x_3, des fonctions $u_i''(x,t)$ existent, sont uniformément continues en t; on a:

$$D_{m+1}(t) < A \int_0^t \frac{\varphi_m(t')\, dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \tag{2.17}$$

enfin ces dérivées d'ordre $m+1$ satisfont condition H de coefficient:

$$C_{m+1}(t) < A \int_0^t \frac{\varphi_m(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.18}$$

Si de plus:

$$\iiint_\Pi \left[\frac{\partial^m X_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l} \right]^2 \delta x < \psi_m^2(t),$$

$\psi_m(t)$ étant une fonction continue (positive), alors les dérivées d'ordre $m+1$ par rapport à x_1, x_2, x_3 des fonctions $u_i(x,t)$ sont fortement continues en t et vérifient l'inégalité:

$$J_{m+1}(t) < A_m \int_0^t \frac{\psi_m(t')\, dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \tag{2.19}$$

Supposons maintenant que les dérivées d'ordre m des fonctions $X_i(x,t)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 existent, soient inférieures en valeur absolue à une fonction continue de t et vérifient une condition H de coefficient $\theta_m(t)$. Alors les dérivées d'ordre $m+2$ des fonctions $u_i(x,t)$ par rapport à x_1, x_2, x_3 existent, sont uniformément continues en t et vérifient l'inégalité:

$$\frac{\partial^2 u_i''(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} = \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial^2 T_{ij}(x-y,t-t')}{\partial x_k \partial x_l}[X_j(y,t') - X_j(x,t')]\,\delta y,$$

are then uniformly continuous in t and

$$D_2(t) < A \int_0^t \frac{C(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.16}$$

More generally:

Suppose the m-th order derivatives of the $X_i(x,t)$ with respect to x_1, x_2, x_3 exist, are continuous, and are smaller than some continuous functions $\varphi_m(t)$. Then the derivatives of order $m+1$ of the $u_i''(x,t)$ with respect to x_1, x_2, x_3 exist and are uniformly continuous in t. We have

$$D_{m+1}(t) < A \int_0^t \frac{\varphi_m(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \tag{2.17}$$

and finally the derivatives of order $m+1$ satisfy condition H with coefficient

$$C_{m+1}(t) < A \int_0^t \frac{\varphi_m(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.18}$$

If further

$$\iiint_\Pi \left[\frac{\partial^m X_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}\right]^2 \delta x < \psi_m^2(t),$$

where $\psi_m(t)$ is a (positive) continuous function, then the derivatives of order $m+1$ with respect to x_1, x_2, x_3 of the $u_i(x,t)$ are strongly continuous in t and satisfy the inequality

$$J_{m+1}(t) < A_m \int_0^t \frac{\psi_m(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} \tag{2.19}$$

Now suppose that the derivatives of order m of the functions $X_i(x,t)$ with respect to x_1, x_2, x_3 exist, are smaller in absolute value than a continuous function of t, and satisfy condition H with coefficient $\theta_m(t)$. Then the derivatives of order $m+2$ of the $u_i(x,t)$ with respect to x_1, x_2, x_3 exist, are uniformly continuous, and satisfy the inequality

$$(2.20) \qquad D_{m+2}(t) < A \int_0^t \frac{\theta_m(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

13. *Cas Général.*

Pour obtenir une solutions $u_i(x,t)$ de (2.1) correspondant à des valeurs initiales données $u_i(x,0)$, il suffit d'ajouter les deux solutions particulières précédentes, c'est-à-dire de prendre:

$$u_i(x,t) = u_i'(x,t) + u_i''(x,t); \; p(x,t) = p''(x,t).$$

Nous nous proposons de compléter les renseignements que fournissent les deux paragraphes précédents en établissant que $u_i(x,t)$ est fortement continue en t et en majorant $W(t)$.

Cette fort continuité est évidente dans le cas où $X_i(x,t)$ est nul hors d'un domaine ϖ; quand x s'éloigne indéfiniment $u_i''(x,t)$, $\frac{\partial u_i''(x,t)}{x_k}$ et $p(x,t)$ tendent alors vers zéro respectivement comme $(x_ix_i)^{-\frac{3}{2}}$, $(x_ix_i)^{-2}$ et $(x_ix_i)^{-1}$; et il suffit d'intégrer les deux membres de l'égalité:

$$\nu u_i \Delta u_i - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_iu_i) - \frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} = -u_iX_i$$

pour obtenir << *la rélation de dissipation de l'énergie:* >>

$$(2.21) \qquad \nu\int_0^t J_1^2(t')\, dt' + \frac{1}{2}W(t) - \frac{1}{2}W(0) = \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i(x,t')X_i(x,t')\, \delta x$$

d'où résulte l'inégalité:

$$\frac{1}{2}W(t) \leq \frac{1}{2}W(0) + \int_0^t dt' \sqrt{W(t')}\sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\, \delta x}.$$

$W(t)$ est donc inférieur ou égal à la solution $\lambda(t)$ de l'équation

$$\frac{1}{2}\lambda(t) = \frac{1}{2}W(0) + \int_0^t dt' \sqrt{\lambda(t')}\sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\, \delta x}$$

c'est-à-dire:

$$(2.22) \qquad \sqrt{W(t)} \leq \int_0^t \sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\, \delta x}\, dt' + \sqrt{W(0)}.$$

(2.20) $$D_{m+2}(t) < A\int_0^t \frac{\theta_m(t')\,dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

13. *General case.*

To obtain solutions $u_i(x,t)$ of (2.1) corresponding to given initial values $u_i(x,0)$, it suffices to superpose the two preceeding particular solutions, taking

$$u_i(x,t) = u_i'(x,t) + u_i''(x,t);\; p(x,t) = p''(x,t).$$

We propose to complete the information of the two preceeding paragraphs by establishing that $u_i(x,t)$ is strongly continuous in t and is majorised by $W(t)$.

This strong continuity is evident in the case where $X_i(x,t)$ is zero outside of a domain ϖ. When x moves indefinitely far away, $u_i''(x,t)$, $\frac{\partial u_i''(x,t)}{x_k}$ and $p(x,t)$ approach zero as $(x_ix_i)^{-\frac{3}{2}}$, $(x_ix_i)^{-2}$ and $(x_ix_i)^{-1}$ respectively, and it suffices to integrate

$$\nu u_i\Delta u_i - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_iu_i) - \frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} = -u_iX_i$$

to obtain *the relation of dissipation of energy*

(2.21) $$\nu\int_0^t J_1^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}W(t) - \frac{1}{2}W(0) = \int_0^t dt'\iiint_\Pi u_i(x,t')X_i(x,t')\,\delta x$$

from which we get the inequality

$$\frac{1}{2}W(t) \leq \frac{1}{2}W(0) + \int_0^t dt'\sqrt{W(t')}\sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\,\delta x}.$$

$W(t)$ is therefore less than or equal to the solution $\lambda(t)$ of the equation

$$\frac{1}{2}\lambda(t) = \frac{1}{2}W(0) + \int_0^t dt'\sqrt{\lambda(t')}\sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\,\delta x}$$

which is to say

(2.22) $$\sqrt{W(t)} \leq \int_0^t\sqrt{\iiint_\Pi X_i(x,t')X_i(x,t')\,\delta x}\,dt' + \sqrt{W(0)}.$$

Quand $X_i(x,t)$ n'est pas nul hors d'un domaine ϖ, on peut approcher les fonctions $X_i(x,t)$ par une suite de fonctions $X_i^*(x,t)$ nulles hors de domaines ϖ^*, et par ce procédé établir ques les relations (2.21) et (2.22) sont encore valables. La relation (2.21) prouve que $W(t)$ est continue; les fonctions $u_i(x,t)$ sont donc fortement continues en t pour $t \geq 0$.

14. $u_i(x,t) = u_i'(x,t) + u_i''(x,t)$ est la seule solution du problème posé au parapraphe 10 pour laquelle $W(t)$ est inférieure à une fonction continue de t; cette proposition résulte de la suivante

Théorème d'unicité: Le système

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0 \tag{2.23}$$

admet une seule solution, définie et continue pour $t \geq 0$, nulle pour $t = 0$, telle que $W(t)$ soit inférieure à une fonction continue de t; c'est $u_i(x,t) = 0$.

En effet les fonctions

$$v_i(x,t) = \int_0^t \overline{u_i(x,t')}\, dt', \quad q(x,t) = \int_0^t \overline{p(x,t')}\, dt'$$

constituent des solutions du même système (2.23); les dérivées

$$\frac{\partial^m v_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{m+1} v_i(x,t)}{\partial t \partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$$

existent et sont continues; on a évidement $\Delta q = 0$ et par suite:

$$\nu\Delta\Delta v_i - \frac{\partial}{\partial t}(\Delta v_i) = 0;$$

la Théorie de la Chaleur permet d'en déduire $\Delta v_i = 0$. D'autre part les inégalitées (1.2) et (1.21) prouvent que l'intégral $\iiint_\Pi v_i(x,t) v_i(x,t)\, \delta x$ est finie. Donc $v_i(x,t) = 0$. Et par suite $u_i(x,t) = 0$.

Enonçons un corollaire qu'utilisera le paragraph suivant:

Lemme 8. Supposons que nous ayons pour $\Theta \leq t < T$ le système de relations:

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = -\frac{\partial X_{ik}(x,t)}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0.$$

Supposons les dérivées $\frac{\partial^2 X_{ik}(x,t)}{\partial x_j \partial x_l}$ continues et les intégrals

When $X_i(x,t)$ is not zero outside a domain ϖ, one can approach the functions $X_i(x,t)$ by a sequence of functions $X_i^*(x,t)$ zero outside domains ϖ^*, and establish by the preceeding that relations (2.21) and (2.22) still hold. Then (2.21) shows that $W(t)$ is continuous. The $u_i(x,t)$ are therefore strongly continuous in t for $t \geq 0$.

14. $u_i(x,t) = u_i'(x,t)+u_i''(x,t)$ is the only solution to the problem posed in paragraph 10, for which $W(t)$ is less than a continuous function of t. This proposition results from the following

Uniqueness theorem The system

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = 0; \ \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0 \tag{2.23}$$

has just one solution defined and continuous for $t \geq 0$, zero for $t = 0$, such that $W(t)$ is less than a continuous function of t. This solution is $u_i(x,t) = 0$.

In fact the functions

$$v_i(x,t) = \int_0^t \overline{u_i(x,t')}\,dt', \quad q(x,t) = \int_0^t \overline{p(x,t')}\,dt'$$

are solutions to the same system (2.23). The derivatives

$$\frac{\partial^m v_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^{m+1} v_i(x,t)}{\partial t \partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$$

exist and are continuous. One evidently has $\Delta q = 0$ and it follows that

$$\nu\Delta\Delta v_i - \frac{\partial}{\partial t}(\Delta v_i) = 0.$$

The theory of heat allows us to deduce that $\Delta v_i = 0$. Further, inequalities (1.2) and (1.21) show that the integral $\iiint_\Pi v_i(x,t)v_i(x,t)\,\delta x$ is finite. Therefore $v_i(x,t) = 0$. And then $u_i(x,t) = 0$.

We state a corollary to be used in the following paragraph.

Lemma 8. Suppose we have for $\Theta \leq t < T$ the system of relations

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = -\frac{\partial X_{ik}(x,t)}{\partial x_k}; \ \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0.$$

Suppose the derivatives $\frac{\partial^2 X_{ik}(x,t)}{\partial x_j \partial x_l}$ are continuous and the integrals

$$\iiint_{\Pi} X_{ik}(x,t)X_{ik}(x,t)\,\delta x, \quad \iiint_{\Pi} u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x$$

inférieures à des fonctions de t continues pour $\Theta \leq t < T$. Nous avons alors:

$$u_i(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_{\Pi} \frac{e^{-\frac{\mathrm{r}^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,t_0)\,\delta y +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{t_0}^{t} dt' \iiint_{\Pi} T_{ij}(x-y,t-t')X_{jk}(y,t)\,\delta y;$$

$$p(x,t) = -\frac{\rho}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_k} \iiint_{\Pi} \frac{1}{r} X_{ik}(y,t)\,\delta y; \ (\Theta \leq t_0 < t < T).$$

III. Mouvements réguliers.

15. *Définitions:* Les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier:

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = u_k(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}; \ \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_k} = 0, \tag{3.1}$$

où r et ρ sont des constantes, p la pression, u_i les composantes de la vitesse. Nous poserons:

$$W(t) = \iiint_{\Pi} u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x,$$

$$V(t) = \max \sqrt{u_i(x,t)u_i(x,t)}.$$

Nous dirons qu'*une solution $u_i(x,t)$ de ce système est réguliere* dans un intervalle de temps[1] $\Theta < t < T$ si dans cet intervalle de temps les fonctions u_i, la fonction p correspondante et les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l}$, $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ sont continues par rapport à x_1, x_2, x_3, t et si en outre les fonctions $W(t)$ et $V(t)$ sont inférieures à des fonctions de t continues pour $\Theta < t < T$.

Nous utiliserons les conventions suivantes:

La fonction $D_m(t)$ sera définie pour chaque valeur de t au voisinage de

---

[1] Le cas où $T = +\infty$ n'est pas exclu.

$$\iiint_\Pi X_{ik}(x,t)X_{ik}(x,t)\,\delta x, \quad \iiint_\Pi u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x$$

less than some continuous functions of t for $\Theta \leq t < T$. We have then

$$u_i(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{\mathrm{r}^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,t_0)\,\delta y +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int_{t_0}^{t} dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y,t-t')X_{jk}(y,t)\,\delta y;$$

$$p(x,t) = -\frac{\rho}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}\iiint_\Pi \frac{1}{r}X_{ik}(y,t)\,\delta y; \;\; (\Theta \leq t_0 < t < T).$$

III. Regular motions.

15. *Definitions:* Motions of viscous liquids are governed by Navier's equations

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = u_k(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}; \;\; \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_k} = 0, \tag{3.1}$$

where ν and ρ are constants, p is the pressure, u_i the components of the velocity. We set

$$W(t) = \iiint_\Pi u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x,$$

$$V(t) = \max\sqrt{u_i(x,t)u_i(x,t)}.$$

We say that *a solution $u_i(x,t)$ of this system is regular* in an interval of time[1] $\Theta < t < T$ if in this interval the functions u_i, the corresponding p and the derivatives $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l}$, $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ are continuous with respect to x_1, x_2, x_3, t and if in addition the functions $W(t)$ and $V(t)$ are less than some continuous functions of t for $\Theta < t < T$.

We use the following conventions.

The function $D_m(t)$ will be defined for each value of t in a neighborhood in

[1] The case where $T = +\infty$ is not excluded.

laquelle les dérivées $\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$ existent et sont uniformément continues en t; elle sera égale à la borne supérieure de leurs valeurs absolues.

La fonction $C_0(t)$ [ou $C_m(t)$] ser définie pour toutes les valeurs de t au voisinage desquelles les fonctions $u_i(x,t)$ [ou les dérivées $\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$] vérifient une même condition H; elle en sera le coefficient.

Enfin la fonction $J_m(t)$ sera définie pour chaque valeur de t au voisinage de Laquelle les dérivées $\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$ existent et sont fortement continues en t; nous poserons:

$$J_m^2(t) = \iiint_\Pi \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \dots} \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \dots} \, \delta x.$$

Le lemme 8 (p. 216) s'applique aux solutions régulières du système (3.1) et nous donne les relations:

$$(3.2) \qquad u_i(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{\mathrm{r}^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,t_0) \, \delta y +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{t_0}^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y, t-t') u_j(y,t') u_k(y,t') \, \delta y;$$

$$(3.3) \qquad p(x,t) = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \iiint_\Pi \frac{1}{r} u_k(y,t) u_j(y,t) \, \delta y; \;\; (\Theta < t_0 < t < T).$$

Les paragraphs 11 et 12 permettent de déduire de la relation (3.2) les faits suivants: les fonctions $u_i(x,t)$ sont uniformément et fortement continues en t pour $\Theta < t < T$; la fonction $C_0(t)$ est définie pour $\Theta < t < T$ et l'on a [cf. (2.7) et (2.18)]:

$$C_0(t) < \frac{A\sqrt{W(t_0)}}{\nu(t-t_0)} + A \int_{t_0}^t \frac{V^2(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

Ce résultat porté dans (3.2) prouve que $D_1(t)$ existe pour $\Theta < t < T$ et fournit l'inégalité [cf. (2.7) et (2.16)]:

$$D_1(t) < \frac{A\sqrt{W(t_0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{5}{4}}} + A \int_{t_0}^t \frac{V(t') C_0(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

which the derivatives $\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$ exist and are uniformly continuous in t; it will be the upper bound of their absolute values.

The function $C_0(t)$ [or $C_m(t)$] will be defined for all values of t in a neighborhood in which the functions $u_i(x,t)$ [or the derivatives $\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$] satisfy the same condition H; it will be the coefficient.

Finally the function $J_m(t)$ will be defined for each value of t in a neighborhood in which the derivatives $\frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_1^h \partial x_2^k \partial x_3^l}$ exist and are strongly continuous in t. We set

$$J_m^2(t) = \iiint_\Pi \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \frac{\partial^m u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l \ldots} \, \delta x.$$

Lemma 8 (p. 216) applies to regular solutions to system (3.1) and gives us the relations*

$$u_i(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,t_0)\, \delta y + \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_{t_0}^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y, t-t') u_j(y,t') u_k(y,t')\, \delta y;$$

$$p(x,t) = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \iiint_\Pi \frac{1}{r} u_k(y,t) u_j(y,t)\, \delta y; \ \ (\Theta < t_0 < t < T). \tag{3.3}$$

Paragraphs 11 and 12 allow us to conclude from (3.2) that the functions $u_i(x,t)$ are uniformly and strongly continuous in t for $\Theta < t < T$, $C_0(t)$ is defined for $\Theta < t < T$ and we have [cf. (2.7) and (2.18)]

$$C_0(t) < \frac{A\sqrt{W(t_0)}}{\nu(t-t_0)} + A \int_{t_0}^t \frac{V^2(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

This result with (3.2) shows that $D_1(t)$ exists for $\Theta < t < T$ and gives the inequality [cf. (2.7) and (2.16)]

$$D_1(t) < \frac{A\sqrt{W(t_0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{5}{4}}} + A \int_{t_0}^t \frac{V(t') C_0(t')\, dt'}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}.$$

---

* `translator's note:` Danny Goodman of Harvard has pointed out that there appears to be a sign discrepancy here.

Poursuivons par récurrence:

L'existence de $D_1(t), \ldots, D_{m+1}(t)$ assure celle de $C_{m+1}(t)$ et l'on a [cf. (2.7) et (2.18)]:

$$C_{m+1}(t) < \frac{A_m\sqrt{W(t_0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{m+3}{2}}} + A_m \int_{t_0}^{t} \frac{V(t')D_{m+1}(t') + \sum_{\alpha+\beta=m+1} D_\alpha(t')D_\beta(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}\, dt'.$$

L'existence de $D_1(t), \ldots, D_{m+1}(t), C_0(t), \ldots, C_{m+1}(t)$ assure celle de $D_{m+2}(t)$ et l'on peut majorer cette dernière fonction à l'aide des précédentes [cf. (2.7) et (2.20)].

Les fonctions $D_m(t)$ et $C_m(t)$ sont donc définies pour $\Theta < t < T$, quelque grand que soit m.

D'autre part les paragraphes 11 et 12 permettent de déduire de (3.2) l'existence de $J_1(t)$ pour toutes ces valeurs de t; et nous avons [cf. (2.8 et (2.19)]:

$$J_1(t) < \frac{A\sqrt{W(0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{2}}} + A\int_{t_0}^{t} \frac{W(t')D_1(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt'.$$

Plus généralement l'existence de $D_1(t), \ldots, D_m(t)$, $J_1(t), \ldots, J_{m-1}(t)$ assure celle de $J_m(t)$ [cf. (2.8) et (2.19)].

Il nous est maintenant aisé d'établir par l'intermédiaire de (3.3) que la fonction $p(x,t)$ et ses dérivées $\frac{\partial^m p(x,t)}{\partial x_k \partial x_j \ldots}$ sont uniformément et fortement continues en t pour $\Theta < t < T$. D'après les équations de Navier il en est de même pour les fonctions $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial^{m+1} u}{\partial t \partial x_k \partial x_j \ldots}$.

Plus généralement les équations (3.1) et (3.3) permettent de ramener l'étude de dérivées qui sont d'ordre $n+1$ par rapport à t à l'étude des dérivées qui sont d'ordre n par rapport à t. Et l'on aboutit finalement au *théoreme* suivante:

Si les fonctions $u_i(x,t)$ constituent une solution des équations de Navier régulière pour $\Theta < t < T$, alors toutes leurs dérivées partielles existent; ces dérivées partielles et les fonctions $u_i(x,t)$ elles-mêmes sont uniformément et fortement continues en t pour $\Theta < t < T$.

We proceed by recurrence:

The existence of $D_1(t), \dots, D_{m+1}(t)$ guarantees that of $C_{m+1}(t)$ and one has [cf. (2.7) and (2.18)]

$$C_{m+1}(t) < \frac{A_m \sqrt{W(t_0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{m+3}{2}}} + A_m \int_{t_0}^{t} \frac{V(t')D_{m+1}(t') + \sum_{\alpha+\beta=m+1} D_\alpha(t')D_\beta(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{3}{4}}}\, dt'.$$

The existence of $D_1(t), \dots, D_{m+1}(t), C_0(t), \dots, C_{m+1}(t)$ guarantees that of $D_{m+2}(t)$ and one can majorize this last function using the preceeding [cf. (2.7) and (2.20)].

The functions $D_m(t)$ and $C_m(t)$ are therefore defined for $\Theta < t < T$, however large m may be.

Further, paragraphs 11 and 12 allow us to deduce from (3.2) the existence of $J_1(t)$ for all values of t and we have [cf. (2.8) and (2.19)]

$$J_1(t) < \frac{A\sqrt{W(0)}}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{2}}} + A \int_{t_0}^{t} \frac{W(t')D_1(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt'.$$

More generally the existence of $D_1(t), \dots, D_m(t),\ J_1(t), \dots, J_{m-1}(t)$ guarantees that of $J_m(t)$ [cf. (2.8) and (2.19)].

It is now easy for us to establish by the intermediary (3.3) that $p(x,t)$ and its derivatives $\frac{\partial^m p(x,t)}{\partial x_k \partial x_j \dots}$ are uniformly and strongly continuous in t for $\Theta < t < T$. By Navier's equations it is the same for the functions $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial^{m+1} u}{\partial t \partial x_k \partial x_j \dots}$.

More generally, equations (3.1) and (3.3) allow us to reduce the study of the order $n+1$ derivatives with respect to t to the study of the order n derivatives with respect to t. So finally we achieve the following *theorem*.

If the functions $u_i(x,t)$ are a regular solution of Navier's equations for $\Theta < t < T$, then all their partial derivatives exist, and the derivatives as well as the $u_i(x,t)$ are uniformly and strongly continuous in t for $\Theta < t < T$.

16. Le paragraphe précédent nous apprend plus: il nous apprend à majorer les fonctions $u_i(x,t)$ et leurs dérivées partielles de tous les ordres au moyen des seules fonctions $W(t)$ et $V(t)$. Il en résulte:

Lemme 9. Soit une infinité de solutions des équations de Navier, $u_i^*(x,t)$, régulières dans un même intervalle de temps (Θ, T). Supposons les diverses fonctions $V^*(t)$ et $W^*(t)$ inférieures à une même fonction de t, continue dans (Θ, T). De cette infinité de solutions on peut alors extraire une suite partielle telle que les fonctions $u_i^*(x,t)$ de cette suite et chaqune de leurs dérivées convergent respectivement vers certaines fonctions $u_i(x,t)$ et vers leurs dérivées. Chacune de ces convergences est uniforme sur tout domaine ϖ pour $\Theta+\eta < t < T-\eta$ $(\eta > 0)$. Les fonctions $u_i(x,t)$ constituent une solution des équations de Navier régulière dans (Θ, T).

En effet le Procéedé diagonal de Cantor (§4, p. 201) permet d'extraire une suite de fonctions $u_i^*(x,t)$ telle que ces fonctions $u_i^*(x,t)$ et leurs dérivées convergent pour tous les systèmes rationnels de valeurs données à x_1, x_2, x_3, t. Cette suite partielle possède les propriétés qu'énonce le lemme.

17. La quantité $W(t)$ et la quantité $J_1(t)$ — que désormais nous désignerons pour simplifier par $J(t)$ — sont liées par une relation importante; elle s'obtient en remplaçant dans (2.21) X_i par $u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ et en remarquant que:

$$\iiint_\Pi u_i(x,t')u_k(x,t')\frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x = \frac{1}{2}\iiint_\Pi u_k(x,t')\frac{\partial u_i(x,t')u_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x = 0;$$

c'est $<<$ *la relation de la dissipation de l'énergie* $>>$:

$$\nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}W(t) = \frac{1}{2}W(t_0). \tag{3.4}$$

Cette relation et les deus paragraphes ci-dessus prouvent que les fonctions $W(t)$, $V(t)$, et $J(t)$ jouent un rôle essentiel. Aussi retiendrons-nous de toutes les inégalités qu'on peut déduire du chapitre II uniquement quelques-unes où figurent ces trois fonctions, sans plus nous occuper des quantités $C_m(t)$, $D_m(t)$, ...

Avant d'écrire ces quelques inégalités fondamentales posons *une définition:*

Une solution $u_i(x,t)$ des équations de Navier sera dite régulière pour $\Theta \le t < T$ quand elle sera régulière pour $\Theta < t < T$ et qu'en outre les circonstances suivantes

16. The preceeding paragraph teaches us more: we learn that it is possible to bound the functions $u_i(x,t)$ and their partial derivatives of all orders by means of just $W(t)$ and $V(t)$. The result is:

Lemma 9. Let $u_i^*(x,t)$ be an infinity of solutions to Navier's equations, all regular in the same interval (Θ, T). Suppose the various $V^*(t)$ and $W^*(t)$ all less than one function of t, continuous in (Θ, T). Then one can extract a subsequence such that the $u_i^*(x,t)$ and each of their derivatives converge respectively to certain functions $u_i(x,t)$ and their derivatives. Each of the convergences is uniform on all domains ϖ for $\Theta + \eta < t < T - \eta$ $(\eta > 0)$. The functions $u_i(x,t)$ are a regular solution of Navier's equations in (Θ, T).

In fact, Cantor's diagonal method (§4, p. 201) allows the extraction of a sequence of functions $u_i^*(x,t)$ which, with their derivatives, converge for any given rational values of x_1, x_2, x_3, t. This subsequence has the properties stated in the lemma.

17. The quantities $W(t)$ and $J_1(t)$ — which from now on we write simply as $J(t)$ — are linked by an important relation. It is obtained by replacing X_i in (2.21) by $u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ and remarking that

$$\iiint_\Pi u_i(x,t')u_k(x,t')\frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x = \frac{1}{2}\iiint_\Pi u_k(x,t')\frac{\partial u_i(x,t')u_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x = 0;$$

It is the *"energy dissipation relation"*

$$\nu\int_{t_0}^{t} J^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}W(t) = \frac{1}{2}W(t_0). \tag{3.4}$$

This relation and the two paragraphs above show that the functions $W(t)$, $V(t)$, and $J(t)$ play an essential role. We will especially point out, of all the inequalities one can deduce from chapter II, some which involve these three functions without any longer occupying ourselves with the quantities $C_m(t)$, $D_m(t)$, ...

Before writing the fundamental inequalities, we make the *definition:*

A solution $u_i(x,t)$ of Navier's equations will be called regular for $\Theta \le t < T$ when it is regular for $\Theta < t < T$ and if in addition the following conditions se présenteront: les fonctions $u_i(x,t)$ et $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}$ sont continues par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, t même pour $t=\Theta$; elles sont fortement continues en t même pour $t=\Theta$; les fonctions $u_i(x,t)$ restent bornées quand t tend vers Θ.

Dans ces conditions la relation (3.2) vaut pour $\Theta \leq t_0 < t < T$ (la valeur Θ était jusq'à présent interdite à t_0); le chapitre II permet d'en déduire *deux inégalités fondamentales;* ce sont, le symbole $\{B; C\}$ nous servant à représenter la plus petite des deux quantités B et C; A', A'', A''' étant des constantes numériques:

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \{\frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t')}{[\nu(t-t')]^2}\}\, dt' + \{V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\} \tag{3.5}$$

$$J(t) < A'' \int_{t_0}^{t} \frac{J(t')V(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + J(t_0) \qquad (\Theta \leq t_0 < t < T). \tag{3.6}$$

18. *Comparaison de deux solutions régulières.*

Considérons deux solutions des équations de Navier, u_i et $u_i + v_i$, régulières pour $\Theta < t < T$. Nous avons:

$$\nu \Delta v_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x_i} = v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (u_k + v_k)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Posons:

$$w(t) = \iiint_\Pi v_i(x,t) v_i(x,t)\, \delta x; \qquad j^2(t) = \iiint_\Pi \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_k}\, \delta x.$$

Appliquons la relation (2.21) qui nous a déjà fourni la relation fondamentale (3.4); elle donne ici:

$$\nu j^2(t) + \frac{1}{2}\frac{dw}{dt} = \iiint_\Pi v_i v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, \delta x + \iiint_\Pi v_i(u_k+v_k)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, \delta x.$$

Or nous avons:

$$\iiint_\Pi v_i(u_k+v_k)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, \delta x = \frac{1}{2}\iiint_\Pi (u_k+v_k)\frac{\partial (v_i v_i)}{\partial x_k}\, \delta x = 0;$$

et

$$\iiint_\Pi v_i v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, \delta x = -\iiint_\Pi \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k u_i\, \delta x < j(t)\sqrt{w(t)}V(t).$$

are satisfied: The functions $u_i(x,t)$ and $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}$ are continuous with respect to x_1, x_2, x_3, t also for $t = \Theta$, they are strongly continuous in t also for $t = \Theta$, and the $u_i(x,t)$ remain bounded when t approaches Θ.

In these conditions the relation (3.2) holds for $\Theta \leq t_0 < t < T$ (the value Θ was not allowed to be t_0 until now). Chapter II allows us to deduce *two fundamental inequalities.* In these, the symbol $\{B; C\}$ is the smaller of B and C, and A', A'', A''' are numerical constants. The inequalities are

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \{\frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t')}{[\nu(t-t')]^2}\}\, dt' + \{V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\} \tag{3.5}$$

$$J(t) < A'' \int_{t_0}^{t} \frac{J(t')V(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + J(t_0) \qquad (\Theta \leq t_0 < t < T). \tag{3.6}$$

18. *Comparison of two regular solutions.*

We consider two solutions of Navier's equations, u_i and $u_i + v_i$, regular for $\Theta < t < T$. We have

$$\nu \Delta v_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial x_i} = v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (u_k + v_k)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}; \qquad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Let

$$w(t) = \iiint_\Pi v_i(x,t) v_i(x,t)\, \delta x; \qquad j^2(t) = \iiint_\Pi \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_k}\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_k}\, \delta x.$$

We apply (2.21) which has already given us the fundamental relation (3.4). Here it gives

$$\nu j^2(t) + \frac{1}{2}\frac{dw}{dt} = \iiint_\Pi v_i v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, \delta x + \iiint_\Pi v_i (u_k + v_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, \delta x.$$

Now we have

$$\iiint_\Pi v_i (u_k + v_k)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\, \delta x = \frac{1}{2}\iiint_\Pi (u_k + v_k)\frac{\partial (v_i v_i)}{\partial x_k}\, \delta x = 0$$

and

$$\iiint_\Pi v_i v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, \delta x = -\iiint_\Pi \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k u_i\, \delta x < j(t)\sqrt{w(t)}\, V(t).$$

Donc:

$$\nu j^2(t) + \frac{1}{2}\frac{dw}{dt} < j(t)\sqrt{w(t)}V(t)$$

d'où:

$$2\nu\frac{dw}{dt} < w(t)V^2(t)$$

et finalement:

$$w(t) < w(t_0)e^{\frac{1}{2\nu}\int_{t_0}^{t} V^2(t')\,dt'} \qquad (\Theta < t_0 < t < T). \tag{3.7}$$

De cette relation importante résulte en particulier:

Une théorème d'unicité: Deux solutions des équations de Navier régulières pour $\Theta \leq t < T$ sont nécessairement identiques pour ces valeurs dt t si leurs états de vitesse le sont pour $t = \Theta$.

19. Donnons-nous *un état initial régulièr,* c'est-à-dire un vecteur de divergence nulle, $u_i(x,t)$, continu, ainsi que les dérivées premières de ses composantes, et tel que les quantités $W(0)$, $V(0)$, $J(0)$ soient finies. Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante:

Théorème d'existence: A tout état initial régulièr, $u_i(x,0)$, correspond une solution des équations de Navier, $u_i(x,t)$, qui est définie pour des valeurs $0 \leq t < \tau$ de t et qui se réduit à $u_i(x,0)$ pour $t = 0$.

Formons les *approximations successives:*

$$u_i^{(0)}(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}}u_i(y,0)\,\delta y,$$

. . . .

$$u_i^{(n+1)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_k}\int_0^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y,t-t')u_k^{(n)}(y,t')u_j^{(n)}(y,t')\,\delta y + u_i^{(0)}(x,t),$$

. . . .

Ecrivons en premier lieu les inégalités, déduites de (2.3) et (2.13):

$$V^0(t) \leq V(0)$$

$$V^{(n+1)}(t) \leq A'\int_0^t \frac{[V^{(n)}(t')]^2}{\sqrt{\nu(t-t')}}\,dt' + V(0);$$

Therefore

$$\nu j^2(t) + \frac{1}{2}\frac{dw}{dt} < j(t)\sqrt{w(t)}V(t)$$

from which

$$2\nu\frac{dw}{dt} < w(t)V^2(t)$$

and finally

$$w(t) < w(t_0)e^{\frac{1}{2\nu}\int_{t_0}^{t} V^2(t')\,dt'} \qquad (\Theta < t_0 < t < T). \tag{3.7}$$

From this important relation we get in particular

A uniqueness theorem: Two regular solutions of Navier's equations for $\Theta \leq t < T$ are necessarily identical for these t if their initial velocities are the same for $t = \Theta$.

19. Suppose we are given a *regular initial state,* which is to say a continuous vector $u_i(x,t)$ with continuous first derivatives, having zero divergence and such that the quantities $W(0)$, $V(0)$, $J(0)$ are finite. The goal of this paragraph is to establish the following proposition.

Existence theorem: To each regular initial state $u_i(x,0)$ there corresponds a solution $u_i(x,t)$ to Navier's equations, defined for $0 \leq t < \tau$ and which reduces to $u_i(x,0)$ for $t = 0$.

We form *successive approximations*

$$u_i^{(0)}(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_\Pi \frac{e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}} u_i(y,0)\,\delta y,$$

. . . .

$$u_i^{(n+1)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_k}\int_0^t dt' \iiint_\Pi T_{ij}(x-y,t-t')u_k^{(n)}(y,t')u_j^{(n)}(y,t')\,\delta y + u_i^{(0)}(x,t),$$

. . . .

First we write inequalities which follow from (2.3) and (2.13):

$$V^0(t) \leq V(0)$$

$$V^{(n+1)}(t) \leq A'\int_0^t \frac{[V^{(n)}(t')]^2}{\sqrt{\nu(t-t')}}\,dt' + V(0).$$

elles prouvent que nous avons, quel que soit n:

$$V^{(n)}(t) \leq \varphi(t) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \tau,$$

si $\varphi(t)$ est une fonctions continue qui vérifie pour ces valeurs de t l'inégalité:

$$\varphi(t) \geq A' \int_0^t \frac{\varphi^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + V(0);$$

nous choisirons $\varphi(t) = (1+A)V(0)$; la valeur à donner à τ est:

$$\tau = A\nu V^{-2}(0). \tag{3.8}$$

Posons alors:

$$v^{(n)}(t) = \max \sqrt{[u_i^{(n)}(x,t) - u_i^{(n+1)}(x,t)][u_i^{(n)}(x,t) - u_i^{(n+1)}(x,t)]}$$

à l'instant t.

Nous avons:

$$v^{(1)}(t) < A' \int_0^\tau \frac{V^2(0)}{\sqrt{\nu(\tau-t')}}\, dt' = AV(0);$$

$$v^{(n+1)}(t) < A \int_0^\tau \frac{\varphi(t')v^{(n)}(t')}{\sqrt{\nu(\tau-t')}}\, dt' = AV(0) \int_0^\tau \frac{v^{(n)}(t')}{\sqrt{\nu(\tau-t')}}\, dt';$$

d'où résulte que, pour $0 \leq t \leq \tau$, les fonctions $u_i^{(n)}(x,t)$ convergent uniformément vers des limites continues, $u_i(x,t)$.

On démontre sans difficulté qu'à l'intérieur de l'intervalle $(0,\tau)$ chacune des dérivées des fonctions $u_i^{(n)}(x,t)$ converge uniformément vers la dérivée correspondante des fonctions $u_i(x,t)$; les raisonnements sont trop proches de ceux du paragraphe 15 pour que nous les reproduisions. Les fonctions $u_i(x,t)$ satisfont donc les équations de Navier pour $0 < t < \tau$.

Vérifions que l'intégrale $W(t) = \iiint_\Pi u_i(x,t)u_i(x,t)\, \delta x$ est inférieure à une fonction continue de t: les inégalités (2.5) et (2.12) fournissent les suivantes, où A_0 représente une constante:

$$\sqrt{W^{(0)}(t)} \leq \sqrt{W(0)}$$

$$\sqrt{W^{(n+1)}(t)} \leq A_0 \int_0^t \frac{\varphi(t')\sqrt{W^{(n)}(t')}}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + \sqrt{W(0)};$$

These show that we have for all n

$$V^{(n)}(t) \le \varphi(t) \qquad \text{for } 0 \le t \le \tau,$$

if $\varphi(t)$ is a continuous function satisfying

$$\varphi(t) \ge A' \int_0^t \frac{\varphi^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + V(0).$$

We choose $\varphi(t) = (1+A)V(0)$ which gives τ the value

$$\tau = A\nu V^{-2}(0). \tag{3.8}$$

Then let

$$v^{(n)}(t) = \max \sqrt{[u_i^{(n)}(x,t) - u_i^{(n+1)}(x,t)][u_i^{(n)}(x,t) - u_i^{(n+1)}(x,t)]}$$

at time t.

We have

$$v^{(1)}(t) < A' \int_0^\tau \frac{V^2(0)}{\sqrt{\nu(\tau-t')}}\, dt' = AV(0)$$

$$v^{(n+1)}(t) < A \int_0^\tau \frac{\varphi(t')v^{(n)}(t')}{\sqrt{\nu(\tau-t')}}\, dt' = AV(0) \int_0^\tau \frac{v^{(n)}(t')}{\sqrt{\nu(\tau-t')}}\, dt'$$

From this we get that the functions $u_i^{(n)}(x,t)$ converge uniformly to continuous limits $u_i(x,t)$ for $0 \le t \le \tau$.

One shows without difficulty that in the interior of the interval, each of the derivatives of the $u_i^{(n)}(x,t)$ converges uniformly to the corresponding derivative of the $u_i(x,t)$; the reasoning is too close to that of paragraph 15 to repeat it. The functions $u_i(x,t)$ therefore satisfy Navier's equations for $0 < t < \tau$.

We verify that the integral $W(t) = \iiint_\Pi u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x$ is less than a continuous function of t. Inequalities (2.5) and (2.12) give the following, where A_0 is a constant

$$\sqrt{W^{(0)}(t)} \le \sqrt{W(0)}$$

$$\sqrt{W^{(n+1)}(t)} \le A_0 \int_0^t \frac{\varphi(t')\sqrt{W^{(n)}(t')}}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + \sqrt{W(0)}.$$

la théorie des équations linéaires nous apprend l'existence d'une fontion positive $\theta(t)$ solution de l'équation:

$$\theta(t) = A_0 \int_0^t \frac{\varphi(t')\theta(t)}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + \sqrt{W(0)};$$

nous avons $W^{(n)}(t) \leq \theta^2(t)$; donc $W(t) \leq \theta^2(t)$.

Il nous reste à préciser comment les fonctions $u_i(x,t)$ se comportent quand t tend vers zéro. Nous savons déja qu'elles se réduisent alors aux données $u_i(x,0)$, en restant continues même pour $t = 0$. Pour prouver qu'elles demeurent fortement continues en t quand t s'annule, il suffit d'après le lemme 1 d'établir que:

$$\limsup_{t \to 0} W(t) \leq W(0);$$

or cette inégalité a manifestement lieu, puisque $\theta^2(0) = W(0)$. On prouve de même que les fonctions $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}$ sont fortement continues en t, même pour $t = 0$.

Dès lors la démonstration du théorem d'existence énoncé ci-dessus est achevée.

Mais la formule (3.8) nous fournit un second résultat: Convenons de dire *qu'une solution des équations de Navier,* régulière dans un intervalle (Θ, T), *devient irrégulière à l'époque* T quand T est fini et qu'il est impossible de définir cette solution régulière dans un intervalle (Θ, T') plus grand que (Θ, T). La formule (3.8) révèle:

Un premier caractère des irrégularités: Si une solution des équations de Navier devient irrégulière à l'époque T, alors $V(t)$ augmente indéfiniment quand t tend vers T; et plus précisément:

$$V(t) > A\sqrt{\frac{\nu}{T-t}}. \tag{3.9}$$

20. *Il serait important de savoir s'il existe des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulières.* S'il ne s'en trouvait pas, la solution régulière unique qui correspond à un état initial régulier, $u_i(x,0)$, existerait pour toutes les valeurs positives de t.

Aucune solution ne pourrait devenir irrégulière si l'inégalité (3.9) était incompatible avec les relations fondamentales (3.4), (3.5) et (3.6); mais il n'en est rien, comme en le voit en choisissant:

By the theory of linear equations there is a positive function $\theta(t)$ satisfying

$$\theta(t) = A_0 \int_0^t \frac{\varphi(t')\theta(t)}{\sqrt{\nu(t-t')}}\, dt' + \sqrt{W(0)}.$$

We have $W^{(n)}(t) \leq \theta^2(t)$, so $W(t) \leq \theta^2(t)$.

It rests upon us to make precise how the $u_i(x,t)$ behave when t tends to zero. We already know that they reduce to the given $u_i(x,0)$, remaining continuous for $t = 0$. To show that they remain strongly continuous in t when t approaches zero, it suffices by lemma 1 to prove

$$\limsup_{t \to 0} W(t) \leq W(0).$$

This inequality is clear since $\theta^2(0) = W(0)$. One shows in the same way that the $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}$ are strongly continuous in t, even for $t = 0$.

At this point the proof of the existence theorem announced above is complete.

But formula (3.8) furnishes a second result: Let us say that *a solution of Navier's equations,* regular in a interval (Θ, T), *becomes irregular at time* T when T is finite and it is impossible to extend the regular solution to any larger interval (Θ, T'). Formula (3.8) reveals

A first characterization of irregularities If a solution of Navier's equations becomes irregular at time T, then $V(t)$ becomes arbitrarily large as t tends to T, and more precisely

$$V(t) > A\sqrt{\frac{\nu}{T-t}}. \tag{3.9}$$

20. *It will be important to know whether there are solutions which become irregular.* If these cannot be found to exist, then the regular solution corresponding to a regular initial state $u_i(x,0)$ will exist for all positive values of t.

No solution can become irregular if inequality (3.9) is incompatible with the fundamental relations (3.4), (3.5) and (3.6), but this is not an issue as one sees by choosing

$$(3.10)\qquad V(t) = A_0'[\nu(T-t)]^{-\frac{1}{2}}; W(t) = A_0''[\nu(T-t)]^{\frac{1}{2}}; J(t) = \frac{\sqrt{A_0''}}{2}[\nu(T-t)]^{-\frac{1}{4}};$$

et en vérifiant que pour des valeurs suffisamment fortes des contantes A_0' et A_0'' l'inégalité (3.9) et la relation (3.4) sont vérifiées, ainsi que les deux inégalités suivantes, qui sont plus strictes que (3.5) et (3.6):

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \{\frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(T-t')}}; \frac{W(t')}{[\nu(T-t')]^2}\} \, dt' + \{V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\}$$

$$J(t) < A'' \int_{t_0}^{t} \frac{J(t')V(t')}{\sqrt{\nu(T-t')}} \, dt' + J(t_0) \qquad (t_0 < t < T).$$

Les équations de Navier possèdent sûrement une solution qui devient irrégulière et pour laquelle les fonctions $W(t)$, $V(t)$ et $J(t)$ sont du type (3.10) si le système:

$$(3.11)\qquad \nu\Delta U_i(x) - \alpha\left[U_i(x) + x_k\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k}\right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = U_k(x)\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_k} = 0,$$

où α désigne une constante positive, possède une solution non nulle, les $U_i(x,t)$ étant bornés et les intégrales $\iiint_\Pi U_i(x,t)U_i(x,t)\,\delta x$ finies; la solution des équations de Navier dont il s'agit est:

$$(3.12)\qquad u_i(x,t) = [2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}} U_i[(2\alpha(T-t))^{-\frac{1}{2}}x] \qquad (t < T)$$

(λx désigne le point de coordonnées λx_1, λx_2, λx_3.)

Je n'ai malheureusement pas réussi à faire l'étude du système (3.11). Nous laisserons donc en suspens cette question de savoir si des irrégularités peuvent ou non se présenter.

21. *Conséquences diverses des relations fondamentales* (3.4), (3.5) *et* (3.6). Soit une solution des équations de Navier, régulière pour $\Theta \leq t < T$ qui, lorsque t tend vers T, devient irrégulière, à moins que T ne soit égal à $+\infty$. Des relations fondamentales (3.4) et (3.5) résulte l'inégalité:

$$V(t) = A_0'[\nu(T-t)]^{-\frac{1}{2}}; W(t) = A_0''[\nu(T-t)]^{\frac{1}{2}}; J(t) = \frac{\sqrt{A_0''}}{2}[\nu(T-t)]^{-\frac{1}{4}} \tag{3.10}$$

and from this check that for all sufficiently large values of the constants A_0' and A_0'' inequality (3.9) and relation (3.4) are satisfied, as well as the following two inequalities which are stronger than (3.5) and (3.6)

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \{\frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(T-t')}}; \frac{W(t')}{[\nu(T-t')]^2}\} \, dt' + \{V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\}$$

$$J(t) < A'' \int_{t_0}^{t} \frac{J(t')V(t')}{\sqrt{\nu(T-t')}} \, dt' + J(t_0) \qquad (t_0 < t < T).$$

Navier's equations certainly have a solution which becomes irregular and for which $W(t)$, $V(t)$ and $J(t)$ are of the type (3.10) if the system

$$\nu \Delta U_i(x) - \alpha \left[U_i(x) + x_k \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k}\right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = U_k(x)\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k}; \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_k} = 0,$$

where α is a positive constant, has a nonzero solution with the $U_i(x,t)$ bounded and the integrals $\iiint_\Pi U_i(x,t) U_i(x,t) \, \delta x$ finite. It is

$$u_i(x,t) = [2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}} U_i[(2\alpha(T-t))^{-\frac{1}{2}} x] \qquad (t < T) \tag{3.12}$$

(λx is the point with coordinates λx_1, λx_2, λx_3.)

Unfortunately I have not made a successful study of system (3.11). We therefore leave in suspense the matter of knowing whether irregularities occur or not.

21. *Various consequences of the fundamental relations* (3.4), (3.5) *and* (3.6). Suppose we have a solution to Navier's equations, regular for $\Theta \leq t < T$ and which becomes irregular as t tends to T, where T is not $+\infty$. From the fundamental relations (3.4) and (3.5) we get the inequality

$$(3.13) \qquad V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \{\frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t_0)}{[\nu(t-t')]^2}\} \, dt' + \{V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\}$$

$$(\Theta \leq t_0 < t < T);$$

supposons qu'une fonction $\varphi(t)$, continue pour $0 < t \leq \tau$, vérifie pour ces valeurs de t l'inégalité:

$$(3.14) \qquad \varphi(t) \geq A' \int_{0}^{t} \{\frac{\varphi^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t_0)}{[\nu(t-t')]^2}\} \, dt' + \{V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}}\},$$

nous avons alors pour les valeurs de t communes aux deux intervalles (t_0, T) et $(t_0, t_0 + \tau)$:

$$(3.15) \qquad V(t) < \varphi(t - t_0);$$

le premier caractère des irrégularités permet d'en déduire

$$(3.16) \qquad t_0 + \tau < T.$$

Supposons en outre connue une fonction $\psi(t)$ telle que

$$(3.17) \qquad \psi(t) \geq A'' \int_{0}^{t} \frac{\varphi(t')\psi(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} \, dt' + J(t_0) \qquad (0 < t \leq \tau);$$

de l'inégalité (3.6) résulte alors la suivante:

$$(3.18) \qquad J(t) < \psi(t - t_0) \quad \text{pour} \quad t_0 < t \leq t_0 + \tau.$$

Le premier caractère des irrégularités se déduite de (3.16) en choisissant:

$$\varphi(t) = (1 + A)V(t_0) \quad \text{et} \quad \tau = A\nu V^{-2}(t_0).$$

Le choix $\varphi(t) = (1 + A)V(t_0)$ et $\tau = +\infty$ satisfait l'inégalité (3.14) quand

$$V(t_0)) > \int_0^{\infty} \{\frac{AV^2(t_0)}{\sqrt{\nu t'}}; \frac{AW(t_0)}{(\nu t')^2}\} \, dt'$$

c'est-à-dire quand $\nu^{-3}W(t_0)V(t_0) < A$. Donc:

Premier cas de régularité: On est assuré qu'une solution régulière ne devient jamais irrégulière quand la quantité $\nu^{-3}W(t)V(t)$ se trouve être inférieure à une

$$V(t) < A' \int_{t_0}^{t} \{ \frac{V^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t_0)}{[\nu(t-t')]^2} \} \, dt' + \{ V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}} \} \tag{3.13}$$

$$(\Theta \le t_0 < t < T).$$

We suppose there is a continuous function $\varphi(t)$ in $0 < t \le \tau$, satisfying the inequality

$$\varphi(t) \ge A' \int_{0}^{t} \{ \frac{\varphi^2(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}}; \frac{W(t_0)}{[\nu(t-t')]^2} \} \, dt' + \{ V(t_0); \frac{A''' J(t_0)}{[\nu(t-t_0)]^{\frac{1}{4}}} \}. \tag{3.14}$$

We then have

$$V(t) < \varphi(t-t_0) \tag{3.15}$$

for values of t common to the two intervals (t_0, T) and $(t_0, t_0+\tau)$. Then the first characterisation of irregularity implies

$$t_0 + \tau < T. \tag{3.16}$$

Further suppose we know a function $\psi(t)$ such that

$$\psi(t) \ge A'' \int_{0}^{t} \frac{\varphi(t')\psi(t')}{\sqrt{\nu(t-t')}} \, dt' + J(t_0) \qquad (0 < t \le \tau). \tag{3.17}$$

Then inequality (3.6) gives

$$J(t) < \psi(t-t_0) \quad \text{for} \quad t_0 < t \le t_0 + \tau. \tag{3.18}$$

The first characterisation of irregularities follows from (3.16) if we choose

$$\varphi(t) = (1+A)V(t_0) \quad \text{and} \quad \tau = A\nu V^{-2}(t_0).$$

The choice $\varphi(t) = (1+A)V(t_0)$ and $\tau = +\infty$ satisfies (3.14) if

$$V(t_0)) > \int_{0}^{\infty} \{ \frac{AV^2(t_0)}{\sqrt{\nu t'}}; \frac{AW(t_0)}{(\nu t')^2} \} \, dt'$$

i.e. when $\nu^{-3}W(t_0)V(t_0) < A$. So:

First case of regularity: A regular solution never becomes irregular if the quantity $\nu^{-3}W(t)V(t)$ is less than a certaine constante A soit à l'instant initial, soit à tout autre instant antérieurement auquel cette solution n'est pas devenue irrégulière.

On peut satisfaire (3.14) et (3.17) par un choix du type

$$\varphi(t) = AJ(t_0)[\nu(t - t_0)]^{-\frac{1}{4}}; \quad \psi(t) = (1 + A)J(t_0); \quad \tau = A\nu^3 J^{-4}(t_0). \tag{3.19}$$

Cette expression fournit:

Un second caractère des irrégularitées: Si une solution des équations de Navier devient irrégulière à l'époque T, alors $J(t)$ augmente indéfiniment quand t tend vers T; et plus précisément:

$$J(t) > \frac{A\nu^{\frac{3}{4}}}{(T - t)^{\frac{1}{4}}}.$$

Les inégalités (3.15) et (3.19) prouvent qu'une solution régulière à un instant t reste régulière jusq'à l'instant $t_0 + \tau$ et que l'on a:

$$V(t_0 + \tau) < A\nu^{-1}J^2(t_0).$$

La relation fondamentale (3.4) donne d'autre part:

$$W(t_0 + \tau) < W(t_0).$$

Donc:

$$\nu^{-3}W(t_0 + \tau)V(t_0 + \tau) < A\nu^{-4}W(t_0)J^2(t_0).$$

L'application du premier cas de régularité à l'époque $t_0 + \tau$ fournit dès lors:

Un second cas de régularité: On est assuré qu'une solution régulière ne devient jamais irrégulière quand la quantité $\nu^{-4}W(t)J^2(t)$ se trouve être inférieure à une certaine constante A soit à l'instant initial, soit à tout autre instant antérieurement auquel cette solution n'est pas devenue irrégulière.

22. On établit de même les résultats suivants dont les précédent peuvent d'ailleurs être considérés comme des cas particuliers:

Caractère des irrégularités: Si une solution devient irrégulière à l'époque T, on a:

$$\{\iiint_\Pi [u_i(x,t)u_i(x,t)]^{\frac{p}{2}}\, \delta x\}^{\frac{1}{p}} > \frac{A(1 - \frac{3}{p})\nu^{\frac{1}{2}(1+\frac{3}{p})}}{(T - t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})}} \qquad (p > 3).$$

Cas de régularité: On est assuré qu'une solution régulière ne devient jamais irrégulière quand on a à un instant quelconque:

certain constant A either initially or at any other instant at which the solution has not become irregular.

One can satisfy (3.14) and (3.17) by a choice of the type

$$\varphi(t) = AJ(t_0)[\nu(t-t_0)]^{-\frac{1}{4}}; \quad \psi(t) = (1+A)J(t_0); \quad \tau = A\nu^3 J^{-4}(t_0). \tag{3.19}$$

This gives

A second characterisation of irregularities: If a solution of Navier's equations becomes irregular at time T, then $J(t)$ grows indefinitely as t tends to T; and more precisely

$$J(t) > \frac{A\nu^{\frac{3}{4}}}{(T-t)^{\frac{1}{4}}}.$$

Inequalities (3.15) and (3.19) show that a solution regular at t remains regular until $t_0 + \tau$ and that one has

$$V(t_0+\tau) < A\nu^{-1}J^2(t_0).$$

The fundamental relation (3.4) further gives

$$W(t_0+\tau) < W(t_0).$$

Therefore

$$\nu^{-3}W(t_0+\tau)V(t_0+\tau) < A\nu^{-4}W(t_0)J^2(t_0).$$

An application of the first case of regularity to the time $t_0 + \tau$ now gives

A second case of regularity: A regular solution never becomes irregular if

$$\nu^{-4}W(t)J^2(t)$$

is less than a certain constant A either initially or at all other previous instants at which the solution has not become irregular.

22. One similarly establishes the following results, of which the preceeding are particular cases.

Characterisation of irregularities: If a solution becomes irregular at time T, one has

$$\{\iiint_\Pi [u_i(x,t)u_i(x,t)]^{\frac{p}{2}}\,\delta x\}^{\frac{1}{p}} > \frac{A(1-\frac{3}{p})\nu^{\frac{1}{2}(1+\frac{3}{p})}}{(T-t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})}} \qquad (p>3).$$

Case of regularity: A regular solution never becomes irregular if at some time

$$[AW(t)]^{p-3} \iiint_{\Pi} [u_i(x,t)u_i(x,t)]^{\frac{p}{2}}\, \delta x\} < A(1-\frac{3}{p})^3 \nu^{3(p-2)} \qquad (p>3).$$

Les cas de régularité que nous signalons montrent comment une solution reste toujours régulière quand son état initial de vitesse est suffisamment voisin du repos. Plus généralement considérons un état de vitesse auquel correspnd une solution ne devenant jamais irrégulière; à tout état initial suffisamment voisin correspond une solution qui elle aussi ne devient jamais irrégulière. La démonstration de ce fait utilise ceux des résultats du paragraphe 34 qui concernent l'allure d'une solution des équations de Navier pour les grandes valeurs de t.

IV. Etats initiaux semi-réguliers.

23. Nous serons amenés, dans le courant du chapitre VI, à envisager des états initiaux non réguliers au sens du paragraphe 17. Commençons leur étude en remarquant que l'inégalité (3.7) permet d'énoncer un théorème d'unicité plus général que celui du paragraphe 18: Posons à cet effet une définition:

Nous dirons qu'une solution des équations de Navier est semi-régulière pour $\Theta \leq t < T$ quand elle est régulière pour $\Theta < t < T$ et que les deux circonstances suivantes se présentent:

L'intégrale $\int_{\Theta}^{t} V^2(t')\, dt'$ est finie quand $\Theta < t < T$.

Les fonctions $u_i(x,t)$ ont de fortes limites en moyenne, $u_i(x,\Theta)$ quand t tend vers Θ.

— Nous nommerons $<<$ état initial des vitesses $>>$ ce vecteur $u_i(x,\Theta)$, dont la quasi-divergence est nulle. —

Le théorème que fournit l'inégalité (3.7) est le suivant:

Théorème d'unicité: Deux solutions des équations de Navier, semi-régulières pour $\Theta \leq t < T$, sont nécessairement identiques pour toutes ces valeurs de t quand leurs états de vitesse à l'instant Θ sont presque partout identiques.

Nous dirons qu'*une état initial de vitesse,* $u_i(x,0)$, est semi-régulier quand it lui correspond une solution $u_i(x,t)$ semi-régulière sur un intervalle $0 \leq t < \tau$.

24. Soit un vecteur $U_i(x)$ de quasi-divergence nulle, dont les composantes sont de carrés sommables sur Π et possèdent des quasi-dérivées $U_{i,j}(x)$ de carrés sommables sur Π. Nous allons établir que le champ de vitesses $U_i(x)$ est un état initial semi-régulier.

$$[AW(t)]^{p-3} \iiint_\Pi [u_i(x,t)u_i(x,t)]^{\frac{p}{2}}\, \delta x\} < A(1-\frac{3}{p})^3 \nu^{3(p-2)} \qquad (p>3).$$

The case of regularity which we are pointing out shows how a solution always remains regular if its initial velocity state is sufficiently near rest. More generally, consider a velocity state to which corresponds a solution which never becomes irregular. For all initial states sufficiently near there corresponds a solution which also never becomes irregular. The proof makes use of those results of paragraph 34 which concern behavior of solutions to Navier's equations for large values of t.

IV. Semi-regular initial states.

23. We will be led by the current of Chapter VI to consider initial states which are not regular in the sense of paragraph 17. We begin their study with the remark, that inequality (3.7) allows a uniqueness theorem which is more general than that of paragraph 18. To this end we make a definition.

We say that a solution of Navier's equations is semi-regular for $\Theta \le t < T$ if it is regular for $\Theta < t < T$ and the two following conditions hold.

The integral $\int_\Theta^t V^2(t')\,dt'$ is finite when $\Theta < t < T$.

The $u_i(x,t)$ have $u_i(x,\Theta)$ as strong limit in mean as t tends to Θ.

— We call "initial velocity state" any vector $u_i(x,\Theta)$, with quasi-divergence zero. — The theorem given by inequality (3.7) is the following.

Uniqueness theorem: Two solutions of Navier's equations which are semi-regular for $\Theta \le t < T$, are necessarily identical for all values of t if their initial velocity states at time Θ are equal almost everywhere.

We say that *an initial velocity state* $u_i(x,0)$ is semi-regular if there corresponds a semi-regular solution $u_i(x,t)$ on an interval $0 \le t < \tau$.

24. Suppose a vector $U_i(x)$ has quasi-divergence zero, components square summable on Π, and quasi-derivatives $U_{i,j}(x)$ square summable on Π. We are going to establish that the velocity field $U_i(x)$ is a semi-regular initial state.

Posons:

$$W(0) = \iiint_\Pi U_i(x)U_i(x)\,\delta x \quad \text{et} \quad J^2(0) = \iiint_\Pi U_{i,j}(x)U_{i,j}(x)\,\delta x.$$

Les fonctions $\overline{U_i(x)}$ constituent un état initial régulier, comme le prouvent le lemme 6 et le paragraphe 8 (p. 209 et 206); soit $u_i^*(x,t)$ la solution régulière qui correspond à l'état initial $\overline{U_i(x)}$; nous avons en vertu de l'in 'egalité (1.21) et de la relation de dissipation de l'énergie (3.4):

$$W^*(t) < W(0). \tag{4.1}$$

Le lemme 4 nous apprend que $\frac{\partial \overline{U_i(x)}}{\partial x_j} = U_{i,j}(x)$; nous avons donc d'après (1.21):

$$J^*(0) < J(0);$$

les relations (3.15), (3.18), et (3.19) permettent d'en déduire que sur un même intervalle $(0,\tau)$ les diverses solutions $u_i^*(x,t)$ sont régulières et vérifient les inégalités:

$$V^*(t) < AJ(0)(\nu t)^{-\frac{1}{4}}; \qquad J^*(t) < (1+A)J(0); \tag{4.2}$$

nous avons d'ailleurs:

$$\tau = A\nu^3 J^{-4}(0). \tag{4.3}$$

Les inégalités (4.1) et (4.2) nous autorisent à appliquer le lemme 9 (p. 220): dans la formule de définition (1.18) de $\overline{U(x)}$ figure une longueur ϵ; il est possible de la faire tendre vers zéro en sorte que pour $0 < t < \tau$ les fonctions $u_i^*(x,t)$ et chacune de leurs dérivées convergnet respectivement vers certaines fonctions $u_i(x,t)$ et vers leurs dérivées. Ces fonctions $u_i(x,t)$ constituent une solution des équation de Navier régulière pour $0 < t < \tau$; d'après (4.1) et (4.2) cette solution satisfait les trois inégalités:

$$W(t) \le W(0); \qquad V(t) \le AJ(0)(\nu t)^{-\frac{1}{4}}; \qquad J(t) \le (1+A)J(0). \tag{4.4}$$

L'intégrale $\int_0^t V^2(t')\,dt'$ est donc finie pour $0 < t < \tau$. Il nous reste à préciser comment les fonctions $u_i(x,t)$ se comportent quand t tend vers zéro.

Let

$$W(0) = \iiint_\Pi U_i(x)U_i(x)\,\delta x \quad \text{et} \quad J^2(0) = \iiint_\Pi U_{i,j}(x)U_{i,j}(x)\,\delta x.$$

The functions $\overline{U_i(x)}$ constitute a regular initial state, as shown by lemma 6 and paragraph 8 (p. 209 et 206). Let $u_i^*(x,t)$ be the regular solution which corresponds to the initial state $\overline{U_i(x)}$. We have, in virtue of inequality (1.21) and the energy dissipation relation (3.4) that

$$W^*(t) < W(0). \tag{4.1}$$

Lemma 4 shows us that $\frac{\partial \overline{U_i(x)}}{\partial x_j} = U_{i,j}(x)$. Thus we have from (1.21)

$$J^*(0) < J(0).$$

Relations (3.15), (3.18), and (3.19) allow us to deduce from this that in some interval $(0,\tau)$ the various solutions $u_i^*(x,t)$ are regular and satisfy inequalities

$$V^*(t) < AJ(0)(\nu t)^{-\frac{1}{4}}; \qquad J^*(t) < (1+A)J(0). \tag{4.2}$$

We have further

$$\tau = A\nu^3 J^{-4}(0). \tag{4.3}$$

Inequalities (4.1) and (4.2) let us apply lemma 9 (p. 220). There is a length ϵ in the definition (1.18) of $\overline{U(x)}$. It is possible to make this tend to zero in such a way that for $0 < t < \tau$ the functions $u_i^*(x,t)$ and all their derivatives converge respectively to certain functions $u_i(x,t)$ and to their derivatives. These $u_i(x,t)$ are a regular solution to Navier's equations for $0 < t < \tau$. By (4.1) and (4.2) this solution satisfies the three inequalities

$$W(t) \le W(0); \qquad V(t) \le AJ(0)(\nu t)^{-\frac{1}{4}}; \qquad J(t) \le (1+A)J(0). \tag{4.4}$$

The integral $\int_0^t V^2(t')\,dt'$ is therefore finite for $0 < t < \tau$. Now we must specify how the $u_i(x,t)$ behave as t tends to zero.

Soit $a_i(x)$ un vecteur quelconque, de divergence nulle, dont les composantes, ainsi que toutes leurs dérivées, sont de carrés sommables sur Π. Des équations de Navier résulte la ralation:

$$\iiint_\Pi u_i^*(x,t)a_i(x)\,\delta x = \iiint_\Pi \overline{U_i(x)}a_i(x)\,\delta x +$$

$$\nu\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i^*(x,t')\Delta a_i(x)\,\delta x + \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_k(x,t')u_i(x,t')\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_k}\,\delta x;$$

d'où, en passant à la limite:

$$\iiint_\Pi u_i(x,t)a_i(x)\,\delta x = \iiint_\Pi U_i(x)a_i(x)\,\delta x +$$

$$\nu\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i(x,t')\Delta a_i(x)\,\delta x + \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_k(x,t')u_i(x,t')\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_k}\,\delta x.$$

Cette dernière relation prouve que

$$\iiint_\Pi u_i(x,t)a_i(x)\,\delta x \qquad \text{tend vers} \qquad \iiint_\Pi U_i(x)a_i(x)\,\delta x$$

quand t tend vers zéro. Dans ces conditions $u_i(x,t)$ a une faible limite en moyenne unique, qui est $U_i(x)$ (cf, Corollaire du lemme 7, p. 209). Mais l'inégalité $W(t) \leq W(0)$ nous permet d'utiliser le critère de forte convergence énoncé p. 200; et nous constatons ainsi que les fonctions $u_i(x,t)$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_i(x)$ quand t tend vers zéro.

$u_i(x,t)$ est donc une solution semi-régulière[1] pour $0 \leq t < \tau$ et elle correspond à l'état initial $U_i(x)$.

25. On peut par des raisonnements analogues traiter les deux autres cas que signale le théorème ci-dessous:

Théorème d'existence: Soit un vecteur $U_i(x)$, de quasi-divergence nulle, dont

[1] On peut même affirmer plus: les fonctions $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_{i,j}(x)$ quand t tend vers zéro.

Let $a_i(x)$ be any vector of divergence zero, for which the components as well as all their derivatives are square summable on Π. From Navier's equations we get

$$\iiint_\Pi u_i^*(x,t)a_i(x)\,\delta x = \iiint_\Pi \overline{U_i(x)}a_i(x)\,\delta x +$$

$$\nu\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i^*(x,t')\Delta a_i(x)\,\delta x + \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_k(x,t')u_i(x,t')\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_k}\,\delta x.$$

Then passing to the limit

$$\iiint_\Pi u_i(x,t)a_i(x)\,\delta x = \iiint_\Pi U_i(x)a_i(x)\,\delta x +$$

$$\nu\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i(x,t')\Delta a_i(x)\,\delta x + \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_k(x,t')u_i(x,t')\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_k}\,\delta x.$$

This last relation shows that

$$\iiint_\Pi u_i(x,t)a_i(x)\,\delta x \qquad \text{tends to} \qquad \iiint_\Pi U_i(x)a_i(x)\,\delta x$$

when t tends to zero. In these conditions $u_i(x,t)$ has a unique weak limit in mean, which is $U_i(x)$ (cf. Corollary to lemma 7, p. 209). But the inequality $W(t) \leq W(0)$ allows us to use the criteria for strong convergence announced on p. 200, and we also note that the $u_i(x,t)$ converge strongly in mean to the $U_i(x)$ as t tends to zero.

$u_i(x,t)$ is therefore a semi-regular solution[1] for $0 \leq t < \tau$ and it corresponds to the initial state $U_i(x)$.

25. By analogous reasoning one can treat the two other cases pointed out in the theorem below.

Existence theorem: Let the vector $U_i(x)$ have quasi-divergence zero, with

---

[1] One can similarly check that the functions $\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}$ converge strongly in mean to the $U_{i,j}(x)$ as t tends to zero.

les composantes sont de carrés sommables sur Π; on peut affirmer que l'état initial de vitesses qu'il définit est semi-régulier:

a) quand les fonctions $U_i(x)$ possèdent des quasi-dérivées de carrés sojmmables sur Π;

b) quand les fonctions $U_i(x)$ sont bornées;

c) ou enfin quand l'intégrale $\iiint_\Pi [U_i(x)U_i(x)]^{\frac{p}{2}}\, \delta x$ est finie pour une valeur de p supérieure à 3.

N. B. Ce théorème d'existence du paragraphe 19 n'épuisent évidemment pas l'étude de l'allure que présente au voisinage de l'instant initial la solution qui correspond à un état initial donné.

V. Solutions turbulentes.

26. Soit un état initial régulier $u_i(x, 0)$. Nous n'avons pas réussi à prouver que la solution régulière des équations de Navier qui lui correspond est définie pour toutes les valeurs de t postérieures à l'instant initial $t = 0$. Mais considérons le système:

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = \overline{u_k(x,t)}\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}; \qquad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0. \tag{5.1}$$

C'est un système qui est très voisin des équations de Navier quand la longeur[1] ϵ est très courte. Tout ce que nous avons dit au cours du chapitre III sur les équations de Navier lui est applicable sans modification, hormis les considérations non concluantes du paragraphe 20. Par là se trouve établie toute une catégorie de propriétés du système (5.1), dans lesquelles ne figure pas la longueur ϵ. D'autre part l'inégalité de Schwarz (1.1) nous donne:

$$\overline{u_k(x,t)} < A_0\epsilon^{-\frac{3}{2}}\sqrt{W(t)},$$

A_0 étant une constante numérique. Cette nouvelle inégalité et la relation de dissipation de l'énergie (3.4) autorisent à écrire à côté de l'inégalité (3.5) la suivante: si une solution du système (5.1) est régulière pour $0 \leq t < T$, alors:

[1] Rappelons que cette longueur a été introduite au §8 (p, 206), quand nous avons défini le symbole $\overline{U(x)}$.

the components are square summable on Π. One can verify that the initial velocity state which it defines is semi-regular

a) if the functions $U_i(x)$ have square summable quasi-derivative on Π;

b) if the functions $U_i(x)$ are bounded;

c) or finally if the integral $\iiint_\Pi [U_i(x)U_i(x)]^{\frac{p}{2}}\,\delta x$ is finite for some value of p larger than 3.

N. B. This theorem and the existence theorem of paragraph 19 evidently do not allow a study of the attraction which is presented in the neighborhood of the initial instant by the solution which corresponds to a given initial state.

V. Turbulent solutions.

26. Let $u_i(x,0)$ be a regular initial state. We have not succeeded in proving that the corresponding regular solution to Navier's equations is defined for all values of t after the initial instant $t=0$. But consider the system

$$\nu\Delta u_i(x,t) - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} = \overline{u_k(x,t)}\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}; \qquad \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_j} = 0. \tag{5.1}$$

This system is very near Navier's equations when the length[1] ϵ is very short. All we have said in Chapter III on Navier's equations is applicable without modification, other than the inconclusive considerations of paragraph 20. Thus we know many properties of system (5.1) which are independent of ϵ. Further, the Schwarz inequality (1.1) gives us

$$\overline{u_k(x,t)} < A_0\epsilon^{-\frac{3}{2}}\sqrt{W(t)},$$

A_0 being a numerical constant. This new inequality and the energy dissipation relation (3.4) allows us to write the following beside inequality (3.5) if a solution to system (5.1) is regular for $0 \le t < T$, then

[1] Recall this length was introduced in §8 (p, 206), when we defined the symbol $\overline{U(x)}$.

$$V(t) < A' A_0 \epsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{W(0)} \int_0^t \frac{V(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} + V(0) \qquad (0 < t < T).$$

De là résulte que sur tout intervalle de régularité $(0, T)$ $V(t)$ reste inférieur à la fonction $\varphi(t)$, continue pour $0 \leq t$, qui satisfait l'équation intégrale linéaire du type de Volterra:

$$\varphi(t) = A' A_0 \epsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{W(0)} \int_0^t \frac{\varphi(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} + V(0);$$

$V(t)$ reste donc borné quand, T étant fini, t tend vers T; ceci contredit le premier caractère des irrégularités (p. 224); en d'autres termes *l'unique solution des équations (5.1) qui correspond à un état initial régulier donné est définie pour toutes les valeurs du temps postérieures à l'instant initial.*

27. Étant donné un mouvement qui satisfait les équations (5.1), nous aurons besoin de *résultats concernant la répartition de son énergie cinétique:* $\frac{1}{2}u_i(x,t)u_i(x,t)$. Ces résultats devront être indépendants[1] de ϵ.

Soit deux longueurs constantes R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$; introduisons la fonction $f(x)$ suivante:

$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad r_0 \leq R_1;$$

$$f(x) = \frac{r_0 - R_1}{R_2 - R_1} \quad \text{pour} \quad R_1 \leq r_0 \leq R_2; \qquad (r_0^2 = x_i x_i)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{pour} \quad R_2 \leq r_0.$$

Un calcul analogue à celui qui fournit la relation de dissipation de l'énergie (2.21) nous donne:

$$\nu \int_0^t dt' \iiint_\Pi f(x) \frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k} \frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x + \frac{1}{2} \iiint_\Pi f(x) u_i(x,t) u_i(x,t)\,\delta x =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_\Pi f(x) u_i(x,0) u_i(x,0)\,\delta x - \nu \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} u_i(x,t') \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}\,\delta x +$$

[1] Ils vaudront également pour les solutions régulières des équations de Navier.

$$V(t) < A' A_0 \epsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{W(0)} \int_0^t \frac{V(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} + V(0) \qquad (0 < t < T).$$

From this we get that on all intervals of regularity $(0, T)$, $V(t)$ remains less than the continuous function $\varphi(t)$ on $0 \leq t$, which satisfies the Volterra linear integral equation

$$\varphi(t) = A' A_0 \epsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{W(0)} \int_0^t \frac{\varphi(t')\,dt'}{\sqrt{\nu(t-t')}} + V(0).$$

$V(t)$ therefore remains bounded when, T being finite, t tends to T. That contradicts the first caracterization of irregularity (p. 224). In other words, *the unique solution to equations (5.1) corresponding to a given regular initial state is defined for all time after the initial instant.*

27. Given a motion which satisfies equations (5.1), we will need results on its *repartition of kinetic energy:* $\frac{1}{2}u_i(x,t)u_i(x,t)$. These must be independent[1] of ϵ.

Consider two constant lengths R_1 and R_2 ($R_1 < R_2$) and introduce the following function $f(x)$

$$f(x) = 0 \quad \text{for} \quad r_0 \leq R_1;$$

$$f(x) = \frac{r_0 - R_1}{R_2 - R_1} \quad \text{for} \quad R_1 \leq r_0 \leq R_2; \qquad (r_0^2 = x_i x_i)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{for} \quad R_2 \leq r_0.$$

A calculation analogous to that giving the energy dissipationn relation (2.21) here gives

$$\nu \int_0^t dt' \iiint_\Pi f(x) \frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k} \frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x + \frac{1}{2} \iiint_\Pi f(x) u_i(x,t) u_i(x,t)\,\delta x =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_\Pi f(x) u_i(x,0) u_i(x,0)\,\delta x - \nu \int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} u_i(x,t') \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k}\,\delta x +$$

---

[1] They will apply equally to regular solutions of Navier's equations.

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} p(x,t')u_i(x,t')\,\delta x +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \overline{u_k(x,t')} u_i(x,t')u_i(x,t')\,\delta x.$$

Nous en déduisons l'inégalité:

$$\frac{1}{2}\iiint_{r_0>R_2} u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x < \frac{1}{2}\iiint_{r_0>R_1} u_i(x,0)u_i(x,0)\,\delta x +$$

$$+\frac{\nu\sqrt{W(0)}}{R_2-R_1}\int_0^t J(t')\,dt' + \frac{1}{\rho}\frac{\sqrt{W(0)}}{R_2-R_1}\int_0^t dt' \sqrt{\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x} + \tag{5.2}$$

$$+\frac{\sqrt{W(0)}}{R_2-R_1}\int_0^t dt' \sqrt{\iiint_\Pi \left[\frac{1}{2}u_i(x,t')u_i(x,t')\right]^2 \delta x}.$$

Majorons les trois derniers termes: d'après l'inégalité de Schwarz

$$\int_0^t J(t')\,dt' < \sqrt{\int_0^t J^2(t')\,dt'}\sqrt{t} < \sqrt{\frac{W(0)}{2\nu}}\sqrt{t}. \tag{5.3}$$

D'autre part (cf. (3.3)):

$$\frac{1}{\rho}p(x,t') = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Pi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x_j}\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_k}\overline{u_k(y,t')}\,\delta y, \tag{5.4}$$

d'où

$$\frac{1}{\rho^2}\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Pi \iiint_\Pi \overline{u_k(x,t')}\frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}\frac{1}{r}\overline{u_j(y,t)}\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_j}\,\delta x\,\delta y;$$

la relation (1.14) et l'inégalité de Schwarz (1.1) nous apprennent que

$$\sum_i \left[\iiint_\Pi \frac{1}{r}\overline{u_j(y,t)}\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_j}\partial y\right]^2 < 4J^4(t');$$

en outre:

$$+\frac{1}{\rho}\int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} p(x,t') u_i(x,t')\,\delta x +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \overline{u_k(x,t')} u_i(x,t') u_i(x,t')\,\delta x.$$

From this we get the inequality

$$\frac{1}{2}\iiint_{r_0>R_2} u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x < \frac{1}{2}\iiint_{r_0>R_1} u_i(x,0)u_i(x,0)\,\delta x +$$

$$+\frac{\nu\sqrt{W(0)}}{R_2-R_1}\int_0^t J(t')\,dt' + \frac{1}{\rho}\frac{\sqrt{W(0)}}{R_2-R_1}\int_0^t dt' \sqrt{\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x} + \tag{5.2}$$

$$+\frac{\sqrt{W(0)}}{R_2-R_1}\int_0^t dt' \sqrt{\iiint_\Pi \left[\frac{1}{2}u_i(x,t')u_i(x,t')\right]^2 \delta x}.$$

We majorize the last three terms. By the Schwarz inequality

$$\int_0^t J(t')\,dt' < \sqrt{\int_0^t J^2(t')\,dt'}\sqrt{t} < \sqrt{\frac{W(0)}{2\nu}}\sqrt{t}. \tag{5.3}$$

Further (cf. (3.3)):

$$\frac{1}{\rho}p(x,t') = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Pi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x_j}\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_k}\overline{u_k(y,t')}\,\delta y, \tag{5.4}$$

from which

$$\frac{1}{\rho^2}\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x = \frac{1}{4\pi}\iiint_\Pi\iiint_\Pi \overline{u_k(x,t')}\frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}\frac{1}{r}\overline{u_j(y,t)}\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_j}\,\delta x\,\delta y.$$

Relation (1.14) and the Schwarz inequality (1.1) give

$$\sum_i \left[\iiint_\Pi \frac{1}{r}\overline{u_j(y,t)}\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_j}\partial y\right]^2 < 4J^4(t').$$

Further

$$\sum_i \left[\iiint_\Pi \overline{u_k(x,t')\frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}}\,\delta x\right]^2 < W(t')J^2(t');$$

donc:

$$\frac{1}{\rho^2}\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x < \frac{1}{2\pi}\sqrt{W(t')}J^3(t');$$

par suite:[1]

$$(5.5) \qquad \frac{1}{\rho}\int_0^t dt'\sqrt{\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x} < \frac{[W(0)]^{\frac14}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t J^{\frac32}(t')\,dt' < \frac{W(0)}{\sqrt{2\pi}(2\nu)^{\frac34}}t^{\frac14}.$$

De (1.13) résulte:

$$\frac12 u_i(x,t')u_i(x,t') = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Pi \frac{\partial(\frac1r)}{\partial x_k}u_i(y,t')\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_k}\,\delta y;$$

cette formule analogue à (5.4) conduit par des calculs analogues aux précédents à l'inégalité:

$$(5.6) \qquad \int_0^t dt'\sqrt{\iiint_\Pi\left[\frac12 u_i(x,t')u_i(x,t')\right]^2\,\delta x} < \frac{W(0)}{\sqrt{2\pi}(2\nu)^{\frac34}}t^{\frac14}.$$

Tenons compte dans (5.2) des majorantes (5.3), (5.5) et (5.6); nous obtenons:

$$\frac12\iiint_{r_0>R_2} u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x < \frac12\iiint_{r_0>R_1} u_i(x,0)u_i(x,0)\,\delta x +$$

$$(5.7) \qquad + \frac{W(0)\sqrt{\nu t}}{\sqrt2(R_2-R_1)} + \frac{W^{\frac32}(0)t^{\frac14}}{2^{\frac14}\pi^{\frac12}\nu^{\frac34}(R_2-R_1)}.$$

---

[1] Nous utilisons l'inégalité:

$$\int_0^t J^{\frac32}(t')\,dt' < \left[\int_0^t J^2(t')\,dt'\right]^{\frac34} t^{\frac14}$$

qui est un cas particulier de <<l'inégalité de Hölder>>:

$$\left|\int_0^t \varphi(t')\psi(t')\,dt'\right| < \left[\int_0^t \varphi^p(t')\,dt'\right]^{\frac1p}\left[\int_0^t \psi^q(t')\,dt'\right]^{\frac1q} \qquad (\frac1p+\frac1q=1; 1<p, 1<q).$$

$$\sum_i \left[\iiint_\Pi \overline{u_k(x,t')\frac{\partial u_i(x,t')}{\partial x_k}}\,\delta x\right]^2 < W(t')J^2(t');$$

therefore

$$\frac{1}{\rho^2}\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x < \frac{1}{2\pi}\sqrt{W(t')}J^3(t');$$

and it follows[1]

$$\tag{5.5} \frac{1}{\rho}\int_0^t dt'\sqrt{\iiint_\Pi p^2(x,t')\,\delta x} < \frac{[W(0)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t J^{\frac{3}{2}}(t')\,dt' < \frac{W(0)}{\sqrt{2\pi}(2\nu)^{\frac{3}{4}}}t^{\frac{1}{4}}.$$

From (1.13) we get

$$\frac{1}{2}u_i(x,t')u_i(x,t') = -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Pi \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x_k}u_i(y,t')\frac{\partial u_i(y,t')}{\partial y_k}\,\delta y.$$

This formula is analogous to (5.4). By calculations like the preceeding it leads to the inequality

$$\tag{5.6} \int_0^t dt'\sqrt{\iiint_\Pi \left[\frac{1}{2}u_i(x,t')u_i(x,t')\right]^2\,\delta x} < \frac{W(0)}{\sqrt{2\pi}(2\nu)^{\frac{3}{4}}}t^{\frac{1}{4}}.$$

Using the majorants (5.3), (5.5), and (5.6) in (5.2) we obtain

$$\frac{1}{2}\iiint_{r_0>R_2} u_i(x,t)u_i(x,t)\,\delta x < \frac{1}{2}\iiint_{r_0>R_1} u_i(x,0)u_i(x,0)\,\delta x +$$

$$\tag{5.7} +\frac{W(0)\sqrt{\nu t}}{\sqrt{2}(R_2-R_1)} + \frac{W^{\frac{3}{2}}(0)t^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{3}{4}}(R_2-R_1)}.$$

---

[1] We use the inequality

$$\int_0^t J^{\frac{3}{2}}(t')\,dt' < \left[\int_0^t J^2(t')\,dt'\right]^{\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{4}}$$

which is a particular case of “Hölder’s inequality”

$$\left|\int_0^t \varphi(t')\psi(t')\,dt'\right| < \left[\int_0^t \varphi^p(t')\,dt'\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^t \psi^q(t')\,dt'\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; 1<p, 1<q).$$

Cette inégalité renseigne sur la façon dont l'énergie cinétique reste localisée à distance finie.

28. Donnons nous à l'instant initial $t = 0$ un état initial constitué par un vecteur quelconque, $U_i(x)$, dont les composantes sont de carrés sommables sur Π et dont la quasi-divergence est nulle. Le vecteur $\overline{U_i(x)}$ constitue un état initial régulier (cf. lemme 6 et paragraphe 8); nommons $u_i^*(x,t)$ la solution régulière des équations (5.1) qui lui correspond; elle est définie pour toutes les valeurs de t. *Le but de ce chapitre est d'étudier les limites que peut avoir cette solution régulière $u_i^*(x,t)$ du syst́eme (5.1) quand ϵ tend vers zéro.*

Les propriétés des fonctions $u_i^*(x,t)$ dont nous ferons usage sont les trois suivantes:

1^o) Soit $a_i^*(x,t)$ un vecteur quelconque de divergence nulle, dont toutes les composantes et toutes leurs dérivées sont uniformément et fortement continues en t; nous avons d'après (5.1):

$$\iiint_\Pi u_i^*(x,t)a_i(x,t)\,\delta x = \iiint_\Pi \overline{U_i(x)}a_i(x,0)\,\delta x +$$

$$(5.8)\qquad + \int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i^*(x,t')\left[\nu\Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right]\delta x +$$

$$+ \int_0^t dt' \iiint_\Pi \overline{u_i^*(x,t)} u_i^*(x,t') \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x.$$

2^o) La relation de dissipation de l'énergie et l'inégalité (1.21) nous donnent:

$$(5.9)\qquad \nu \int_{t_0}^t J^{*2}(t')\,dt' + \frac{1}{2}W^*(t) = \frac{1}{2}W^*(t_0) < \frac{1}{2}W(0).$$

$$(5.10)\qquad \left(\text{Par definition } W(0) = \iiint_\Pi U_i(x)U_i(x)\,\delta x\right).$$

3^o) L'inégalité (5.7) et l'inégalité $W^*(0) < W(0)$ justifient la proposition suivante:

This inequality shows how kinetic energy remains localized at finite distance.

28. Suppose we have given at $t = 0$ an arbitrary initial vector $U_i(x)$, with components square summable on Π and quasi-divergence zero. The vector $\overline{U_i(x)}$ is a regular initial state (cf. lemma 6 and paragraph 8). Write $u_i^*(x,t)$ for the corresponding regular solution to equations (5.1). It is defined for all t. *The object of this chapter is to study the limits which this regular solution may have as ϵ tends to zero.*

We will use the following three properties of the $u_i^*(x,t)$.

1^o) Let $a_i^*(x,t)$ be an arbitrary vector of divergence zero, of which all components and all their derivatives are uniformly and strongly continuous in t. By (5.1):

$$\iiint_\Pi u_i^*(x,t)a_i(x,t)\,\delta x = \iiint_\Pi \overline{U_i(x)}a_i(x,0)\,\delta x +$$

$$+\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i^*(x,t')\left[\nu\Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right]\delta x + \tag{5.8}$$

$$+\int_0^t dt' \iiint_\Pi \overline{u_i^*(x,t)}u_i^*(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x.$$

2^o) The energy dissipation relation and (1.21) give

$$\nu\int_{t_0}^t J^{*2}(t')\,dt' + \frac{1}{2}W^*(t) = \frac{1}{2}W^*(t_0) < \frac{1}{2}W(0). \tag{5.9}$$

$$\left(\text{By definition } W(0) = \iiint_\Pi U_i(x)U_i(x)\,\delta x\right). \tag{5.10}$$

3^o) Inequality (5.7) and the inequality $W^*(0) < W(0)$ justify the following proposition

Soit une constante arbitrairement faible η $(0 < \eta < W(0))$; nommons $R_1(\eta)$ la longueur que:

$$\iiint_{r_0 > R_1(\eta)} U_i(x) U_i(x)\, \delta x = \frac{\eta}{2},$$

désignons par $s(\eta, t)$ la sphère, qui dépend continûment de η et de t, dont le centre est l'origine des coordonées et dont le rayon est:

$$R_2(\eta, t) = R_1(\eta, t) + \frac{4}{\eta}\left[\frac{W(0)\sqrt{\nu t}}{\sqrt{2}} + \frac{W^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{4}}}\right],$$

nous avons:

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \iiint_{\Pi - s(\eta, t)} u_i^*(x,t) u_i^*(x,t)\, \delta x \leq \eta. \tag{5.11}$$

29. Faisons tendre ϵ vers zéro par une suite dénombrable de valeurs: $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ Considérons les fonctions $W^*(t)$ qui leur correspondent; elles sont bornées dans leur ensemble et chacune d'elles est décroissante. Le Procédé diagonal de Cantor (§4) permet d'extraire de la suite $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ une suite partielle $\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}, \ldots$ telle que les fonctions $W^*(t)$ conrrespondantes convergent pour chaque valeur rationnelle de t. Ces fonctions $W^*(t)$ convergent alors vers une fonction décroissante, sauf peut-être en des points de discontinuité de cette dernière. Les points de discontinuité d'une fonction décroissante sont dénombrable. Une seconde application du Procédé diagonal de Cantor permet donc d'extraire de la suite $\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}, \ldots$ une suite partielle $\epsilon_{m_1}, \epsilon_{m_2}, \ldots$ telle que les fonctions $W^*(t)$ correspondants convergent[1] quel que soit t. Nous nommerons $W(t)$ la fonction décroissante qui est leur limite. (Cette définition ne contredit pas (5.10).)

L'inégalité $W^*(t) < W(0)$ prouve que chacune des intégrals:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt' \iiint_{\varpi} u_i^*(x,t')\, \delta x; \quad \int_{t_1}^{t_2} dt' \iiint_{\varpi} \overline{u_k^*(x,t')} u_i^*(x,t')\, \delta x$$

est inférieure à une borne indépendente de ϵ. Par une troisième application du Procédé diagonal de Cantor nous pouvons donc extraire de la suite $\epsilon_{m_1}, \epsilon_{m_2}, \ldots$ une suite partielle $\epsilon_{n_1}, \epsilon_{n_2}, \ldots$ telle que chacune de ces intégrals ait une limite

[1] En d'autres termes nous utilisons le théorème de Helly.

Le η be an arbitrarily small constant with $(0 < \eta < W(0))$. We let $R_1(\eta)$ be the length for which

$$\iiint_{r_0 > R_1(\eta)} U_i(x) U_i(x)\, \delta x = \frac{\eta}{2}$$

and write $s(\eta, t)$ for the sphere with center at the origin with radius

$$R_2(\eta, t) = R_1(\eta, t) + \frac{4}{\eta}\left[\frac{W(0)\sqrt{\nu t}}{\sqrt{2}} + \frac{W^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{4}}}\right].$$

We have

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \iiint_{\Pi - s(\eta, t)} u_i^*(x, t) u_i^*(x, t)\, \delta x \leq \eta. \tag{5.11}$$

29. Let ϵ tend to zero through a countable sequence of values $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ Consider the corresponding functions $W^*(t)$. This is a bounded set of functions and each is decreasing. Cantor's diagonal method (§4) allows us to extract from the sequence $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ a subsequence $\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}, \ldots$ such that the $W^*(t)$ converge for all rational values of t. The $W^*(t)$ therefore converge to a decreasing function, except maybe at points of discontinuity of the limit. The points discontinuity of a decreasing function are countable. A second application of Cantor's method allows us to extract from $\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}, \ldots$ a subsequence $\epsilon_{m_1}, \epsilon_{m_2}, \ldots$ such that the corresponding $W^*(t)$ converge[1] for all t. We write $W(t)$ for the decreasing function which is their limit. (This definition does not contradict (5.10).)

The inequality $W^*(t) < W(0)$ shows that each of the integrals

$$\int_{t_1}^{t_2} dt' \iiint_{\varpi} u_i^*(x, t')\, \delta x; \quad \int_{t_1}^{t_2} dt' \iiint_{\varpi} \overline{u_k^*(x, t')} u_i^*(x, t')\, \delta x$$

is less than a bound independent of ϵ. By a third use of Cantor's diagonal method we can therefore extract from the sequence $\epsilon_{m_1}, \epsilon_{m_2}, \ldots$ a subsequence $\epsilon_{n_1}, \epsilon_{n_2}, \ldots$ such that each of these integrals has a unique

[1] In other words we use Helly's theorem.

unique quand t_1 et t_2 sont rationnels et que ϖ est un cube d'arêtes parallèles aux axes et de sommets à coordonées rationnelles. L'inégalité $W^*(t) < W(0)$ et les hypothèses faite sur les fonctions $a_i(x,t)$ permettent d'affirmer que dans ces conditions chacune des intégrales:

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i^*(x,t') \left[\nu \Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right] \delta x;$$

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi \overline{u_k^*(x,t')} u_i^*(x,t') \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k} \delta x$$

a une limite unique. Ce résultat, porté dans (5.8), nous apprend que l'intégrale

$$\iiint_\Pi u_i^*(x,t) a_i(x,t) \, \delta x$$

converge vers une limite unique, quels que soient $a_i(x,t)$ et t. Donc (cf. Corollaire du lemme 7) les fonctions $u_i^*(x,t)$ convergent faiblement en moyenne vers une limite $U_i(x,t)$ pour chaque valeur de t.

Ainsi, étant donnée une suite de valeurs de ϵ qui tendent vers zéro, on peut en extraire une suite partielle telle que les *fonctions* $W^*(t)$ *convergent vers une limite unique* $W(t)$ et que *les fonctions* $u_i^*(x,t)$ *aient pour chaque valeur de* t *une faible limite en moyenne unique:* $U_i(x,t)$. Nous supposerons désormais que ϵ tend vers zéro par une suite de valeurs ϵ^* telle que ces deux circonstances se produisent.

Remarque I Nous avons d'après (1.9):

$$W(t) \geq \iiint_\Pi U_i(x,t) U_i(x,t) \, \delta x.$$

[1] De ces hypothèses résulte en effet qu'étant donnés t, un nombre η (> 0) et une fonction $\delta(x,t)$ égale à l'une des dérivées des fonctions $a_i(x,t)$ on peut trouver un entier N et deux fonctions discontinues $\beta(x,t)$ et $\gamma(x,t)$ qui possedent les propriétés suivantes: ces fonctions $\beta(x,t)$, $\gamma(x,t)$ restent constantes quand x_1, x_2, x_3, t varient sans atteindre aucune valeur multiple de $\frac{1}{N}$; chacune d'elles est nulle hors d'un domaine ϖ; on a:

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi [\delta(x,t') - \beta(x,t')]^2 \, \delta x < \eta; \quad |\delta(x,t') - \gamma(x,t')| < \eta \quad \text{pour} \quad 0 < t' < t.$$

limit when t_1 and t_2 are rational and ϖ is a cube with sides parallel to the axes and with vertices having rational coordinates. The inequality $W^*(t) < W(0)$ and the hypotheses made on the $a_i(x,t)$ imply that the integrals

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi u_i^*(x,t') \left[\nu \Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right] \delta x;$$

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi \overline{u_k^*(x,t')} u_i^*(x,t') \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\, \delta x$$

have a unique limit. This result, with (5.8) shows that

$$\iiint_\Pi u_i^*(x,t) a_i(x,t)\, \delta x$$

converges to a unique limit, for all $a_i(x,t)$ and t. Therefore (cf. Corollary to lemma 7) the $u_i^*(x,t)$ converge weakly in mean to some limit $U_i(x,t)$ for each value of t.

Also, given a sequence of values of ϵ which tend to zero, one can extract from them a subsequence such that *the* $W^*(t)$ *converge to a unique limit* $W(t)$ and that *the* $u_i^*(x,t)$ *have for each value of* t *a unique weak limit in mean:* $U_i(x,t)$. We suppose from here on that ϵ tends to zero through a sequence of values ϵ^* such that these two conditions hold.

Remark I By (1.9)

$$W(t) \geq \iiint_\Pi U_i(x,t) U_i(x,t)\, \delta x.$$

---

[1] In fact these hypotheses imply the following. Given t, a number η (> 0) and a function $\delta(x,t)$ equal to one of the derivatives of the $a_i(x,t)$, one can find an integer N and two discontinuous functions $\beta(x,t)$ and $\gamma(x,t)$ with the following properties. $\beta(x,t)$ and $\gamma(x,t)$ remain constant when x_1, x_2, x_3, t vary without hitting(?) any multiple of $\frac{1}{N}$, and each of them is zero outside of a domain ϖ, and(?)

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi [\delta(x,t') - \beta(x,t')]^2\, \delta x < \eta; \quad |\delta(x,t') - \gamma(x,t')| < \eta \quad \text{for} \quad 0 < t' < t.$$

Remarque II. Le vecteur $U_i(x,t)$ possède manifestement une quasi-divergence égal à zéro.

30. L'inégalité (5.9) nous donne:

$$\nu \int_0^\infty [\liminf J^*(t')]^2 \, dt' < \frac{1}{2} W(0);$$

la limite inférieure de $J^*(t)$ ne peut donc être $+\infty$ que pour un ensemble de valeurs de t dont la mesure est nulle. Soit t_1 une valeur de l'ensemble complémentaire. On peut extraire de la suite de valeurs ϵ^* envisagée une suite partielle[1] ϵ^{**} telle que sur Π les fonctions $\frac{\partial u_i^{**}(x,t_1)}{\partial x_j}$ correspondantes convergent faiblement en moyenne vers une limite: $U_{i,j}(x,t_1)$ (cf. Théorème fondamental de M. F. Riesz, p. 202).

Le lemme 2 nous permet d'en déduire tout d'abord que *les fonctions* $U_i(x,t_1)$ *ont des quasi-dérivées qui sont ces fonctions* $U_{i,j}(x,t_1)$. Nous poserons:

$$J(t_1) = \iiint_\Pi U_{i,j}(x,t_1) U_{i,j}(x,t_1) \, \delta x;$$

nous avons (cf. (1.9)):

$$J(t_1) \leq \liminf J^*(t_1);$$

portons cette inégalité dans (5.9); il vient:

$$(5.12) \qquad \nu \int_{t_0}^t J^2(t') \, dt' + \frac{1}{2} W(t) \leq \frac{1}{2} W(t_0) \leq \frac{1}{2} W(0) \qquad (0 \leq t_0 \leq t).$$

Le lemme 2 nous apprend ensuite que sur tout domaine ϖ les fonctions $u_i^{**}(x,t_1)$ convergent fortement en moyenne vers les fonctions $U_i(x,t)$;

$$\lim_{\epsilon^{**} \to 0} \iiint_\varpi u_i^{**}(x,t_1) u_i^{**}(x,t_1) \, \delta x = \iiint_\varpi U_i(x,t_1) U_i(x,t_1) \, \delta x.$$

Choisissons ϖ identique à $s(\eta, t_1)$ et tenons compte de (5.11); il vient:

[1] Cette suite partielle que nous choisissons est fonction de l'époque t_1 envisagée.

Remark II. The vector $U_i(x,t)$ clearly has quasi-divergence zero.

30. Inequality (5.9) gives us

$$\nu \int_0^{\infty} [\liminf J^*(t')]^2 \, dt' < \frac{1}{2} W(0).$$

Thus the $\liminf J^*(t)$ can only be $+\infty$ for a set of values of t of measure zero. Suppose t_1 is in the complement of this set. One can extract from the sequence of values ϵ^* considered here a subsequence[1] ϵ^{**} such that on Π the corresponding functions $\frac{\partial u_i^{**}(x,t_1)}{\partial x_j}$ converge weakly in mean to a limit $U_{i,j}(x,t_1)$ (cf. Fundamental Theorem of F. Riesz, p. 202).

Lemma 2 allows us to conclude that *the* $U_i(x,t_1)$ *have quasi-derivatives which are the* $U_{i,j}(x,t_1)$. We set

$$J(t_1) = \iiint_{\Pi} U_{i,j}(x,t_1) U_{i,j}(x,t_1) \, \delta x.$$

We have (cf. (1.9))

$$J(t_1) \leq \liminf J^*(t_1).$$

Using this inequality in (5.9) we obtain

$$\nu \int_{t_0}^{t} J^2(t') \, dt' + \frac{1}{2} W(t) \leq \frac{1}{2} W(t_0) \leq \frac{1}{2} W(0) \qquad (0 \leq t_0 \leq t). \tag{5.12}$$

Lemma 2 teaches us finally that on all domains ϖ the $u_i^{**}(x,t_1)$ converge strongly in mean to the $U_i(x,t)$;

$$\lim_{\epsilon^{**} \to 0} \iiint_{\varpi} u_i^{**}(x,t_1) u_i^{**}(x,t_1) \, \delta x = \iiint_{\varpi} U_i(x,t_1) U_i(x,t_1) \, \delta x.$$

Choosing ϖ to be $s(\eta, t_1)$ and taking account of (5.11) we get

[1] The subsequence we choose is a function of t_1.

$$\limsup \iiint_{\Pi} u_i^{**}(x,t_1)u_i^{**}(x,t_1)\,\delta x \leq \iiint_{s(\eta,t_1)} U_i(x,t_1)U_i(x,t_1)\,\delta x + \eta.$$

D'où, puisque η est arbitrairement faible et que $W^*(t_1)$ a une valeur limite:

$$\lim_{\epsilon^*\to 0} \iiint_{\Pi} u_i^{*}(x,t_1)u_i^{*}(x,t_1)\,\delta x \leq \iiint_{\Pi} U_i(x,t_1)U_i(x,t_1)\,\delta x. \tag{5.13}$$

Appliquons le critère de forte convergence énoncé p. 200; nous constatons que *sur* Π *les fonctions* $u_i^*(x,t)$ *convergent fortement en moyenne vers les fonctions* $U_i(x,t)$ *pours toutes les valeurs* t_1 *de* t *qui n'appartiennent pas à l'ensemble de mesure nulle sur lequel la limite inférieure de* $J^*(t)$ *est* $+\infty$.

Pour toutes ces valeurs t les deux membres de (5.13) sont égaux c'est-à-dire:

$$W(t_1) = \iiint_{\Pi} U_i(x,t_1)U_i(x,t_1)\,\delta x. \tag{5.14}$$

Les fonctions $\overline{u_i^*(x,t_1)}$ elles aussi convergent fortement en moyenne vers $U_i(x,t_1)$ (cf. Généralisation du lemme 3, p. 207). L'intégrale qui figure dans (5.8):

$$\iiint_{\Pi} \overline{u_k^*(x,t')}u_i^*(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x$$

converge donc vers:

$$\iiint_{\Pi} U_k(x,t')U_i(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x$$

pour presque toutes les valeurs de t' (cf. (1.8)); cette intégrale est d'autre part inférieure à

$$3W(0)\max\left|\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\right|;$$

le Théorème de M. Lebesgue qui concerne le passage à la limite sous le signe $\int$ permet d'en déduire que:

$$\limsup \iiint_{\Pi} u_i^{**}(x,t_1)u_i^{**}(x,t_1)\,\delta x \leq \iiint_{s(\eta,t_1)} U_i(x,t_1)U_i(x,t_1)\,\delta x + \eta.$$

From this, since η is arbitrarily small and since $W^*(t_1)$ has a limit

$$\lim_{\epsilon^* \to 0} \iiint_{\Pi} u_i^*(x,t_1)u_i^*(x,t_1)\,\delta x \leq \iiint_{\Pi} U_i(x,t_1)U_i(x,t_1)\,\delta x. \tag{5.13}$$

We apply the strong convergence criterion from p. 200. Note that *on* Π *the* $u_i^*(x,t)$ *converge strongly in mean to the* $U_i(x,t)$ *for all values* t_1 *of* t *not belonging to the set of measure zero on which* $\liminf J^*(t) = +\infty$.

For all these values of t the two sides of (5.13) are equal, i.e.

$$W(t_1) = \iiint_{\Pi} U_i(x,t_1)U_i(x,t_1)\,\delta x. \tag{5.14}$$

The functions $\overline{u_i^*(x,t_1)}$ also converge strongly in mean to $U_i(x,t_1)$ (cf. Generalisation of lemma 3, p. 207). The integral which figures in (5.8)

$$\iiint_{\Pi} \overline{u_k^*(x,t')}u_i^*(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x$$

therefore converges to

$$\iiint_{\Pi} U_k(x,t')U_i(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x$$

for almost all values of t' (cf. (1.8)). Further, this integral is less than

$$3W(0)\max|\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}|$$

Lebesgue's theorem concerning passage to the limit under the $\int$ sign gives

$$\lim_{\epsilon^*\to 0}\int_0^t dt'\iiint_\Pi \overline{u_k^*(x,t')}u_i^*(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x =$$

$$\int_0^t dt'\iiint_\Pi U_k(x,t')U_i(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x,$$

le second membre de cette relation pouvant être mis, d'après lemme 5, sous la forme:

$$-\int_0^t dt'\iiint_\Pi U_k(x,t')U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x.$$

Dès le début de ce paragraphe nous avions le droit d'affirmer que les autres termes qui figurent dans (5.8) convergent de même ver des limites qui s'obtiennent en substituant $U_i(x,t)$ à $u_i^*(x,t)$, $U_i(x)$ à $\overline{U_i(x)}$. Par suite:

$$\iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x = \iiint_\Pi U_i(x)a_i(x,0)\,\delta x$$

$$+\int_0^t dt'\iiint_\Pi U_i(x,t)\left[\nu\Delta a_i(x,t')+\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right]\delta x \tag{5.15}$$

$$-\int_0^t dt'\iiint_\Pi U_k(x,t')U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x.$$

31. Les résultats ainsi obtenus conduisent à la définition suivante: Nous dirons qu'un vecteur $U_i(x,t)$, défini pour $t \geq 0$, constitue *une solution turbulente des équations de Navier* quand les conditions que nous allons énoncer se trouveront réalisées, les valeurs de t que nous nommerons *singulières* constituant un ensemble de mesure nulle:

Pour chacque valeur positive de t les fonctions $U_i(x,t)$ sont de carrés sommables sur Π, et le vecteur $U_i(x,t)$ a une quasi-divergence nulle.

La fonction:

$$\lim_{\epsilon^*\to 0}\int_0^t dt' \iiint_\Pi \overline{u_k^*(x,t')}u_i^*(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x =$$

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_k(x,t')U_i(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x,$$

By lemma 5 the right hand side of this can be put into the form

$$-\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_k(x,t')U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x.$$

From the beginning of this paragraph we can claim that the other terms in (5.8) similarly converge. We obtain the limits by substituting $U_i(x,t)$ for $u_i^*(x,t)$ and $U_i(x)$ for $\overline{U_i(x)}$. This gives

$$\iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x = \iiint_\Pi U_i(x)a_i(x,0)\,\delta x$$

$$+\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_i(x,t)\left[\nu\Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right]\,\delta x \tag{5.15}$$

$$-\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_k(x,t')U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x.$$

31. These results lead to the following definition. We say that a vector $U_i(x,t)$ defined for $t \geq 0$ constitutes *a turbulent solution to Navier's equations* when the following conditions are realised, where values of t that we call *singular* form a set of measure zero.

For each positive t the functions $U_i(x,t)$ are square summable on Π and the vector $U_i(x,t)$ has quasi-divergence zero.

The function

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_i(x,t') \left[\nu\Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right] \delta x - \iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x$$

$$-\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_k(x,t')U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x$$

est constante ($t \geq 0$). (Autrement dit la relation (5.15) a lieu.) Pour toutes les valeurs positives de t, sauf éventuellement pour certaines valeurs *singulières*, les fonctions $U_i(x,t)$ possèdent des quasi-dérivées $U_{i,j}(x,t)$, de carrés sommables sur Π.

Nous poserons:

$$J^2(t) = \iiint_\Pi U_{i,j}(x,t)U_{i,j}(x,t)\,\delta x,$$

$J(t)$ se trouvant donc défini pour presque toutes les valeurs positives de t.

Il existe une fonction $W(t)$, définie pour $t \geq 0$, qui possède les deux propriétés suivantes:

$$\text{la fonction } \nu \int_0^t J^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}W(t) \text{ est non croissante;}$$

on a: $\iiint_\Pi U_i(x,t)U_i(x,t)\,\delta x \leq W(t)$, l'inégalité n'ayant lieu qu'à certaines époques *singulières*, dont l'époque initiale $t = 0$ ne fait pas partie.

Nous dirons *qu'une telle solution turbulente correspond à l'état initial* $U_i(x)$ quand nous aurons: $U_i(x,0) = U_i(x)$.

La conclusion de ce chapitre peut alors se formuler comme suit:

Théorème d'existence: Supposons donné à l'instant initial un état initial $U_i(x)$ tel que les fonctions $U_i(x)$ soient de carrés sommables sur Π et que le vecteur de composantes $U_i(x)$ possède une quasi-divergence nulle. Il correspond à cet état initial au moins une solution turbulente, que est définie pour toutes les valeurs du temps postèrieures à l'instant initial.

VI. Structure d'une solution turbulente.

32. Il nous reste à établir quel liens existent entre les solutions régulières el les solutions turbulentes des équations de Navier. Il est tout d'abord

$$\int_0^t dt' \iiint_\Pi U_i(x,t') \left[\nu \Delta a_i(x,t') + \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial t'}\right] \delta x - \iiint_\Pi U_i(x,t) a_i(x,t)\, \delta x$$

$$- \int_0^t dt' \iiint_\Pi U_k(x,t') U_{i,k}(x,t') a_i(x,t')\, \delta x$$

is constant ($t \geq 0$). (Equivalently, (5.15) holds.) For all positive values of t except possibly for certain *singular* values, the functions $U_i(x,t)$ have quasi-derivatives $U_{i,j}(x,t)$ which are square summable on Π.

Set

$$J^2(t) = \iiint_\Pi U_{i,j}(x,t) U_{i,j}(x,t)\, \delta x,$$

$J(t)$ is thus defined for almost all positive t.

There exists a function $W(t)$ defined for $t \geq 0$ which has the two following properties.

$$\text{the function } \nu \int_0^t J^2(t')\, dt' + \frac{1}{2} W(t) \text{ is nonincreasing}$$

and $\iiint_\Pi U_i(x,t) U_i(x,t)\, \delta x \leq W(t)$, the inequality holding except for certain *singular* times, but $t = 0$ is not a singular time.

We say that *such a turbulent solution corresponds to initial state* $U_i(x)$ when we have $U_i(x,0) = U_i(x)$.

The conclusion of this chapter can then be formulated as follows.

Existence theorem: Suppose an initial state $U_i(x)$ is given such that the functions $U_i(x)$ are square summable on Π and that the vector having components $U_i(x)$ has quasi-divergence zero. There corresponds to this initial state at least one turbulent solution, which is defined for all values of $t > 0$.

VI. Structure of a turbulent solution.

32. It remains to establish what connections exist between regular solutions and turbulent solutions to Navier's equations. It is entirely évident que toute solution régulière constitue a fortiori une solution turbulente. Nous allons chercher dans quels cas une solution turbulente se trouve constituer une solution régulière. Généralisons à cet effet les raisonnements du paragraphe 18 (p. 221).

Comparaison d'une solution régulière et d'une solution turbulente: Soit une solution des équations de Navier, $a_i(x,t)$, définie et semi-régulière pour $\Theta \leq t < T$; nous supposons qu'elle devient irrégulière quand t tend vers T, à moins que T ne soit égal à $+\infty$. Considérons une solution turbulente, $U_i(x,t)$, définie pour $\Theta \leq t$, l'époque Θ n'étant pas singulière. Les symboles $W(t)$ et $J(t)$ se rapporteront à cette solution turbulente. Nous poserons:

$$w(t) = W(t) - 2\iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x + \iiint_\Pi a_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x$$

$$j^2(t) = J^2(t) - 2\iiint U_{i,j}(x,t)\frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j}\,\delta x + \iiint_\Pi \frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j}\,\delta x.$$

Rappelons que la fonction de t:

$$\nu\int_\Theta^t dt'\iiint_\Pi \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_j}\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_j}\,\delta x + \frac{1}{2}\iiint_\Pi a_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x$$

est constante et que la fonction:

$$\nu\int_\Theta^t J^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}W(t)$$

est non croissante. Il en résulte que la fonction de t:

$$\nu\int_\Theta^t j^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}w(t) + 2\nu\int_\Theta^t dt'\iiint_\Pi U_{i,k}(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x + \iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x \tag{6.1}$$

est non croissante. Tenons compte de la relation (5.15) et de ce que $a_i(x,t)$

clear that any regular solution is a fortiori a turbulent solution. We are going to look for those cases in which a turbulent solution is regular. To this end we generalize the reasoning of paragraph 18 (p. 221).

Comparison of a regular solution and a turbulent solution: Let $a_i(x,t)$ be a solution to Navier's equations, defined and semi-regular for $\Theta \leq t < T$. We suppose that it becomes irregular when t tends to T, at least in the case when T is not equal to $+\infty$. Consider a turbulent solution $U_i(x,t)$ defined for $\Theta \leq t$, where Θ is not a singular time. The symbols $W(t)$ and $J(t)$ correspond to the turbulent solution. Set

$$w(t) = W(t) - 2\iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x + \iiint_\Pi a_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x$$

$$j^2(t) = J^2(t) - 2\iiint U_{i,j}(x,t)\frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j}\,\delta x + \iiint_\Pi \frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j}\,\delta x.$$

Recall that the funtion of t

$$\nu\int_\Theta^t dt' \iiint_\Pi \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_j}\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_j}\,\delta x + \frac{1}{2}\iiint_\Pi a_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x$$

is constant in t and that the function

$$\nu\int_\Theta^t J^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}W(t)$$

is nonincreasing. Consequently the function of t

$$\nu\int_\Theta^t j^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}w(t) + 2\nu\int_\Theta^t dt' \iiint_\Pi U_{i,k}(x,t')\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x + \iiint_\Pi U_i(x,t)a_i(x,t)\,\delta x \tag{6.1}$$

is nonincreasing. Taking account of relation (5.15) and of that for $a_i(x,t)$

est une solution semi-régulière des équations de Navier: nous constatons que la fonction non croissante (6.1) est à une constante près égale à la suivante:

$$(6.2) \qquad \nu \int_{\Theta}^{t} j^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}w(t) + \int_{\Theta}^{t} dt' \iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')] U_{i,k}(x,t') a_i(x,t')\,\delta x.$$

Or nous avons pour chaque valeur non singulière de t:

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')] \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k} a_i(x,t')\,\delta x =$$

$$\frac{1}{2} \iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')] \frac{\partial a_i(x,t') a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x = 0;$$

l'intégrale

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')] U_{i,k}(x,t') a_i(x,t')\,\delta x$$

peut donc s'écrire

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')] \left[U_{i,k}(x,t') - \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k} \right] a_i(x,t')\,\delta x$$

et par suite elle est inférieure en valeur absolue à:

$$\sqrt{w(t')}\, j(t') V(t'),$$

$V(t')$ désignant la plus grande longueur du vecteur $a_i(x,t)$ à l'instant t'. Puisque (6.2) n'est pas croissante, il en est donc a fortiori de même pour la fonction:

$$\nu \int_{\Theta}^{t} j^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}w(t) - \int_{\Theta}^{t} \sqrt{w(t')}\, j(t') V(t')\,dt'.$$

Or

$$\nu \int_{\Theta}^{t} j^2(t')\,dt' - \int_{\Theta}^{t} \sqrt{w(t')}\, j(t') V(t')\,dt' + \frac{1}{4\nu} \int_{\Theta}^{t} w(t') V^2(t')\,dt'$$

ne peut manifestement pas décroitre. Par suite la fonction:

is a semi-regular solution to Navier's equations. Note that the nonincreasing function (6.1) is up to a constant nearly equal to

$$\nu \int_{\Theta}^{t} j^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}w(t) + \int_{\Theta}^{t} dt' \iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')]U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x. \tag{6.2}$$

Now we have for each nonsingular value of t

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')]\frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k} a_i(x,t')\,\delta x =$$

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')]\frac{\partial a_i(x,t')a_i(x,t')}{\partial x_k}\,\delta x = 0.$$

The integral

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')]U_{i,k}(x,t')a_i(x,t')\,\delta x$$

may therefore be written

$$\iiint_{\Pi} [a_k(x,t') - U_k(x,t')]\left[U_{i,k}(x,t') - \frac{\partial a_i(x,t')}{\partial x_k}\right] a_i(x,t')\,\delta x$$

and so it is less in absolute value than

$$\sqrt{w(t')}j(t')V(t'),$$

where $V(t')$ is the greatest length of the vector $a_i(x,t)$ at time t'. Since (6.2) is not increasing, it is a fortiori the same for the function

$$\nu \int_{\Theta}^{t} j^2(t')\,dt' + \frac{1}{2}w(t) - \int_{\Theta}^{t} \sqrt{w(t')}j(t')V(t')\,dt'.$$

Now

$$\nu \int_{\Theta}^{t} j^2(t')\,dt' - \int_{\Theta}^{t} \sqrt{w(t')}j(t')V(t')\,dt' + \frac{1}{4\nu}\int_{\Theta}^{t} w(t')V^2(t')\,dt'$$

manifestly cannot decrease. It follows that the function

$$\frac{1}{2}w(t) - \frac{1}{4\nu}\int_{\Theta}^{t} w(t')V^2(t')\,dt'$$

est non croissante. De là résulte l'inégalité qui généralise (3.7):

$$w(t) \leq w(\Theta)e^{\frac{1}{2\nu}\int_{\Theta}^{t} V^2(t')\,dt'} \qquad (\Theta < t < T). \tag{6.3}$$

Supposons en particulier que les solutions $U_i(x,t)$ et $a_i(x,t)$ correspondent à un même état initial: $w(\Theta) = 0$; de (6.3) résulte alors $w(t) = 0$; donc $U_i(x,t) = a_i(x,t)$ pour $\Theta \leq t < T$. Ce résultat constitue *un théorème d'unicité*[1] dont ceux des paragraphes 18 et 23 (p. 222 et 228) ne sont que des cas particuliers.

33. *Régularité d'une solutions turbulente pendant certains intervalles de temps.*

Considérons une solution turbulente $U_i(x,t)$, définie pour $t \geq 0$. A toute époque non singulière le vecteur $U_i(x,t)$ constitue un état initial semi-régulier (cf. p.231 Théorème d'existence, cas a)); le théorème d'unicité que nous venons d'établir a dès lors la conséquence suivante: Soit une époque non singulière, c'est-à-dire choisie hors d'un certain ensemble de mesure nulle: cette époque est l'origine d'un intervalle de temps à l'intérieur duquel la solution turbulente envisagée coïncide avec une solution régulière des équations de Navier; et cette coïncidence ne cesse pas tant que cette solution régulière n'est pas devenue irrégulière. Ce résultat, complété par quelques autres aisés à établir, nous fournit le théorème ci-dessous:

Théorème de structure.

Pour qu'un vecteur $U_i(x,t)$ constitue, quand $t \geq 0$, une solution turbulente des équations de Navier, il fout et il suffit que ce vecteur possède les trois propriétés suivantes:

a) Nommons *intervalle de régularité* tout intervalle $\overline{\Theta_l T_l}$ de l'axe des temps à l'intérieur duquel le vecteur $U_i(x,t)$ constitue une solution régulière des équations de Navier, sans que ceci soit vrai pour aucun intervalle contenant $\overline{\Theta_l T_l}$. Soit O l'ensemble ouvert formé par la réunion de ces intervalles de régularité

---

[1] Je n'ai pu établir de théorème d'unicité affirmant qu'à un état initial donné correspond une solution turbulent unique.

$$\frac{1}{2}w(t) - \frac{1}{4\nu}\int_{\Theta}^{t} w(t')V^2(t')\,dt'$$

is nonincreasing. From this we get the inequality generalizing (3.7)

$$w(t) \leq w(\Theta)e^{\frac{1}{2\nu}\int_{\Theta}^{t} V^2(t')\,dt'} \qquad (\Theta < t < T). \tag{6.3}$$

Suppose in particular that the solutions $U_i(x,t)$ and $a_i(x,t)$ correspond to the same initial state. Then $w(\Theta) = 0$ and by (6.3) $w(t) = 0$. therefore $U_i(x,t) = a_i(x,t)$ for $\Theta \leq t < T$. The uniqueness theorems of paragraphs 18 and 23 (p. 222 and 228) are special cases of this result.

33. *Regularity of a turbulent solution in certain time intervals.*

Consider a turbulent solution $U_i(x,t)$ defined for $t \geq 0$. For each nonsingular time the vector $U_i(x,t)$ is a semi-regular initial state (cf. p.231 existence theorem, case a)). The uniqueness theorem that we are going to establish will have the following consequence. Consider a nonsingular time, i.e. a time chosen outside of a certain set of measure zero. Then this is the origin of an interval of time in the interior of which the turbulent solution coincides with a regular solution of Navier's equation, and this coincidence does not end as long as the regular solution remains so. This result, complemented by some others which are easy to establish, gives us the next theorem.

Structure theorem.

For a vector $U_i(x,t)$ to be a turbulent solution to Navier's equations for $t \geq 0$, it is necessary and sufficient that it have the following three properties.

a) By an *interval of regularity* we mean any interval $\overline{\Theta_l T_l}$ of time in the interior of which the vector $U_i(x,t)$ is a regular solution to Navier's equations, and such that this is true for no interval containing $\overline{\Theta_l T_l}$. Let O be the open set which is the union of the intervals of regularity

---

[1] I have not been able to establish a uniqueness theorem stating that to a given initial state, there corresponds a unique turbulent solution.

(qui sont deux à deux sans point commun). O ne doit différer du demi-axe $t \geq 0$ que par un ensemble de mesure nulle.

b) La fonction $\iiint_\Pi U_i(x,t)U_i(x,t)\,\delta x$ est décroissante sur l'ensemble que constitue O et l'instant initial $t = 0$.

c) Quand t' tend vers t les fonctions $U_i(x,t')$ doivent converger faiblement en moyenne vers les fonctions $U_i(x,t)$.

Compléments:

1) Une solution turbulente correspondant à un état initial semi-régulier coincide avec la solution semi-régulière qui correspond à cet état initial aussi longtemps que celle-ci existe.

2) Faisons tendre en croissant t vers l'extrémité T_l d'un intervalle de régularité. La solution $U_i(x,t)$, qui est régulière pour $\Theta_l < t < T_l$ devient alors irrégulière.

Ce théorème de structure nous permet de *résumer notre travail* en ces termes: Nous avons essayé d'établir l'existence d'une solution des équations de Navier correspondant à un état initial donné: nous n'y avons réussi qu'en renonçant à la régularité de la solution en certains instants, convenablement choisis, dont l'ensemble est de mesure nulle; en ces instants la solution n'est assujettie qu'à une condition de continuité très large (c) et à une condition exprimant la non-croissance de l'énergie cinétique (b).

Remarque: Si le système (3.11) possède une solution non nulle $U_i(x)$ cette solution permet de construire un exemple très simple de solution turbulente c'est le vecteur $U_i(x,t)$ égal à

$$[2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}} U_i \left[[2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}} x \right] \text{ pour } t < T$$

et à 0 pour $t > T$; il existe une seule époque d'irrégularité: T.

34. *Compléments relatifs aux intervalles de régularité et à l'allure d'une solution des équations de Navier pour les grandes valeurs du temps.*

Le chapitre IV nous fournit, outre le théorème d'existence utilisé au paragraphe précédent, l'inégalité (4.3); d'où résulte la proposition suivante: considérons (no two of which have a point in common). O must only differ from the half axis $t \geq 0$ by a set of measure zero.

b) The function $\iiint_\Pi U_i(x,t)U_i(x,t)\,\delta x$ is decreasing on the set consisting of O and $t=0$.

c) As t' tends to t the $U_i(x,t')$ must converge weakly in mean to the $U_i(x,t)$.

Supplementary information

1) A turbulent solution corresponding to a semi-regular initial state coincides with the semi-regular solution having that initial state, for as long a time as the semi-regular solution exists.

2) Make t increase to T_l in an interval of regularity. Then the solution $U_i(x,t)$ which is regular for $\Theta_l < t < T_l$ becomes irregular.

This structure theorem allows us to *summarize our work* in these terms: We have tried to establish the existence of a solution to Navier's equations corresponding to a given initial state. We have had to give up regularity of the solution at a set of times of measure zero. At these times the solution is only subject to a very weak continuity condition (c) and to condition (b) expressing the nonincrease of kinetic energy.

Remark: If system (3.11) has a nonzero solution $U_i(x)$ then we can very simply construct a turbulent solution $U_i(x,t)$ equal to

$$[2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}}U_i\left[[2\alpha(T-t)]^{-\frac{1}{2}}x\right] \text{ for } t<T$$

and to 0 for $t>T$. This has a single irregular time T.

34. *Supplementary information on intervals of regularity and behavior of solutions to Navier's equations for large time.*

Chapter IV gives inequality (4.3) in addition to the existence theorem used in the previous paragraph. This results in the following proposition. Consider une solution turbulente $U_i(x,t)$; soit une époque non singulière t et une époque T_l postérieure; nous avons:

$$J(t') > A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (T_l - t')^{-\frac{1}{4}},$$

A_1 étant une certaine constante numérique. Portons cette minorante de $J(t')$ dans l'inégalité:

$$\nu \int_0^{T_l} J^2(t')\,dt' < \frac{1}{2} W(0),$$

il vient:*

$$2A_1^2 \nu^{\frac{5}{2}} T_l^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} W(0).$$

Toutes les époques singulières sont donc antérieures à l'époque:

$$\theta = \frac{W^2(0)}{16 A_1^4 \nu^5}. \tag{6.4}$$

Autrement dit, il existe un intervalle de régularité qui contient cette époque θ et qui s'étend jusqu'à $+\infty$. Un mouvement régulier jusqu'à l'époque θ ne devient jamais irrégulier.

Il est aisé de préciser ce résultat:

Soit un intervalle de régularité de longueur finie $\overline{\Theta_l T_l}$; toute époque t intérieure à cet intervalle est non singulière; nous avons donc d'après (4.3):

$$J(t') > A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (T_l - t')^{-\frac{1}{4}} \text{ pour } \Theta_l < t' < T_l.$$

(cf. Second caractére des irrégularités, p. 227.)

Portons cette minorante de $J(t')$ dans l'inégalité:

$$\nu \sum_l \int_{\Theta_l T_l} J^2(t')\,dt' \leq \frac{1}{2} W(0);$$

il vient, le signe $\sum_l'$ portant sur tous les intervalles de longueur finie:

$$2A_1^2 \nu^{\frac{5}{2}} \sum_l{}' \sqrt{(T_l - \Theta_l)} < \frac{1}{2} W(0). \tag{6.5}$$

* `translator's note:` in the original: $2A_1 \nu^{\frac{5}{2}} T_l^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} W(0)$

a turbulent solution $U_i(x,t)$. Let t' be a nonsingular time* and T_l a later time. We have

$$J(t') > A_1\nu^{\frac{3}{4}}(T_l - t')^{-\frac{1}{4}},$$

A_1 being a certain numerical constant. Using this lower bound for $J(t')$ in the inequality

$$\nu\int_0^{T_l} J^2(t')\,dt' < \frac{1}{2}W(0)$$

we get**

$$2A_1^2\nu^{\frac{5}{2}}T_l^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}W(0).$$

All singular times occur prior to the time

$$\theta = \frac{W^2(0)}{16A_1^4\nu^5}. \tag{6.4}$$

In other words, there is an interval of regularity that contains θ and which extends to $+\infty$. A motion which is regular up to time θ never becomes irregular.

It is easy to make this more precise.

Let $\overline{\Theta_l T_l}$ be an interval of regularity of finite length. All times t interior to this interval are nonsingular. By (4.3)

$$J(t') > A_1\nu^{\frac{3}{4}}(T_l - t')^{-\frac{1}{4}} \text{ for } \Theta_l < t' < T_l.$$

(cf. Second characterisation of irregularity, p. 227.)

Using this lower bound on $J(t')$ in

$$\nu\sum_l\int_{\Theta_l T_l} J^2(t')\,dt' \le \frac{1}{2}W(0).$$

Summing over all the intervals of finite length we get

$$2A_1^2\nu^{\frac{5}{2}}{\sum_l}'\sqrt{(T_l - \Theta_l)} < \frac{1}{2}W(0). \tag{6.5}$$

** `translator's note:` in the original: $2A_1\nu^{\frac{5}{2}}T_l^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}W(0)$

* `translator's note:` was t in the original

Le chapitre IV nous donne, à côté de l'inégalité (4.3) (4.4). Il en résulte la propriété suivante: Considérons une solution turbulente, une époque non singuliére t', une époque postérieure t. Nous avons:

$$\text{soit } t - t' > A_1^4 \nu^3 J^{-4}(t'), \text{ soit } J(t) < (1+A)J(t')$$

c'est-́a-dire:[1]

$$J(t') > \{A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (t-t')^{-\frac{1}{4}}; \frac{1}{1+A} J(t)\}.$$

Portons cette minorante de $J(t')$ dans l'inégalité:

$$\nu \int_0^t J^2(t')\, dt' \leq \frac{1}{2} W(0);$$

nous obtenons:

$$\nu \int_0^t \{A_1^2 \nu^{\frac{3}{2}} (t-t')^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{(1+A)^2} J^2(t)\}\, dt' \leq \frac{1}{2} W(0). \tag{6.6}$$

Cette inégalité (6.6) fournit pour les valeurs de t supérieures à θ une majorante de $J(t)$; cette majorante a d'ailleurs une expression analytique assez compliquée.

Nous nous contenterons de remarquer que de (6.6) résulte l'inégalité moins précise:

$$\nu \int_0^t \{A_1^2 \nu^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{(1+A)^2} J^2(t)\}\, dt' \leq \frac{1}{2} W(0);$$

cette dernière exprime tout simplement que

$$J^2(t) < \frac{(1+A)^2}{2} \frac{W(0)}{\nu t} \text{ pour } t > \frac{W^2(0)}{4A_1^4 \nu^5}. \tag{6.7}$$

Complétons ce résultat, qui est relatif à l'allure asymptotique de $J(t)$, par un autre relatif à l'allure asymptotique de $V(t)$: Les inégalités (4.3) et (4.4) nous apprennent que:

$$V(t) < AJ(t')[\nu(t-t')]^{-\frac{1}{4}} \text{ pour } t - t' < A_1^4 \nu^3 J^{-4}(t').$$

[1] Rappelons que le symbole $\{B; C\}$ nous sert à désigner la plus petite des quantités B et C.

In Chapter IV we found the pair of inequalities (4.3) (4.4). These imply the following. Consider a turbulent solution, a nonsingular time t', and a later time t. We have

$$\text{either } t - t' > A_1^4 \nu^3 J^{-4}(t'), \text{ or } J(t) < (1+A) J(t')$$

in other words[1]

$$J(t') > \{A_1 \nu^{\frac{3}{4}} (t-t')^{-\frac{1}{4}}; \frac{1}{1+A} J(t)\}.$$

Using this lower bound for $J(t')$ in

$$\nu \int_0^t J^2(t')\, dt' \leq \frac{1}{2} W(0);$$

we get

$$\nu \int_0^t \{A_1^2 \nu^{\frac{3}{2}} (t-t')^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{(1+A)^2} J^2(t)\}\, dt' \leq \frac{1}{2} W(0). \tag{6.6}$$

This gives an upper bound for $J(t)$ for values of t larger than θ. However this bound has a rather complicated analytic expression.

We content ourselves by remarking that (6.6) gives the less precise

$$\nu \int_0^t \{A_1^2 \nu^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{(1+A)^2} J^2(t)\}\, dt' \leq \frac{1}{2} W(0).$$

This can most simply be expressed as

$$J^2(t) < \frac{(1+A)^2}{2} \frac{W(0)}{\nu t} \text{ for } t > \frac{W^2(0)}{4 A_1^4 \nu^5}. \tag{6.7}$$

Complementing this result on asymptotic behavior of $J(t)$ there is another on $V(t)$. Inequalities (4.3) and (4.4) give

$$V(t) < A J(t') [\nu (t-t')]^{-\frac{1}{4}} \text{ for } t - t' < A_1^4 \nu^3 J^{-4}(t').$$

[1] Recall that the symbol $\{B; C\}$ denotes the smaller of B and C.

D'après (6.7) cette dernière inégalité est satisfaite pour $t' = \frac{1}{2}t$ quand on prend $t > A\frac{W^2(0)}{\nu^5}$; on a donc pour ces valeurs de t:

$$V(t) < A\sqrt{W(0)}(\nu t)^{-\frac{3}{4}}.$$

En résumé il existe des constantes A telles que l'on ait:

$$J(t) < A\sqrt{W(0)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } V(t) < A\sqrt{W(0)}(\nu t)^{-\frac{3}{4}} \text{ pour } t > A\frac{W^2(0)}{\nu^5}.$$

N. B. J'ignore si $W(t)$ tend nécessairement vers 0 quand t augmente indéfiniment.

By (6.7) this last inequality is satisfied for $t' = \frac{1}{2}t$ if one takes $t > A\frac{W^2(0)}{\nu^5}$. One therefore has for these t

$$V(t) < A\sqrt{W(0)}(\nu t)^{-\frac{3}{4}}.$$

In summary there exist some constants A such that

$$J(t) < A\sqrt{W(0)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}} \text{ and } V(t) < A\sqrt{W(0)}(\nu t)^{-\frac{3}{4}} \text{ for } t > A\frac{W^2(0)}{\nu^5}.$$

N. B. I am ignoring the case in which $W(t)$ necessarily tends to 0 as t becomes indefinitely large.