Cosa vediamo nei disegni geometrici?
(il caso della funzione blancmange)

David Tall & Silvia Di Giacomo

Sommario: Immagini e disegni di ogni tipo vengono frequentemente usati per facilitare la comunicazione di idee matematiche. Essi sono così comodi ed efficaci da diventare spesso il mezzo predominante con cui concepiamo la matematica. Sfortunatamente le visualizzazioni possono anche essere ingannevoli e condurre a conclusioni erronee, per quanto convincenti, ed in questo articolo mostriamo un classico esempio di come ciò possa avvenire.

Abstract: Imagery and pictures of all types are often used to ease communication of mathematical ideas. They are so useful and effective that they often become the main means by which we conceive mathematics. Unfortunately, although pictures can be very convincing, they can also be deceptive and lead to wrong conclusions. In this paper we present a classical example of such an occurence.

In geometria, e più generalmente nei disegni che rappresentano le idee matematiche, è importante non solo guardare la figura ma anche conoscere il contesto nel quale è stata disegnata. Qui per esempio abbiamo un disegno a mano libera che rappresenta una tangente ad una circonferenza.

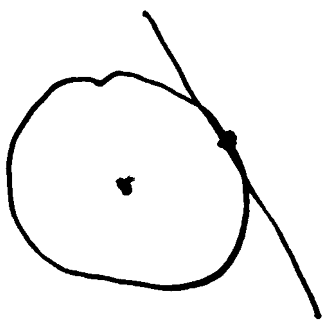


Figura 1: Una tangente ad un cerchio

Non è una rappresentazione molto accurata: il cerchio non è circolare, la linea non è retta, è la linea non "tocca" la circonferenza . Eppure, in qualche modo, un disegno come questo disegnato sudi un pezzo di carta o su una lavagna può provvedere la base di una discussione matematica.

In *A Mathematician's Apology*, il ben noto matematico di Cambridge, G. H. Hardy, ha indirizzato la questione come segue:

> *Supponiamo che stia dando una la lezione riguardo un qualche sistema geometrico, come l'originaria geometria Euclidea, e che disegni delle figure sulla lavagna per stimolare l'immaginazione del mio pubblico,*

disegni approssimativi di linee rette o cerchi oppure ellissi. È chiaro... la verità dei teoremi che io dimostro non è in alcun modo influenzata dalla qualità dei miei disegni. La loro funzione è puramente di convogliare ai miei ascoltatori il significato che intendo comunicare, e, se possibile, ci sarebbe del guadagno nell'averli ri-tracciati dal più abile geometra. Essi sono illustrazioni pedagogiche, non parte della materia oggetto della lezione.

Ciò che importa dunque, non è la figura che viene disegnata in una rappresentazione fisica, ma la figura che noi immaginiamo nella nostra mente. Vediamo di usare queste idee per fare un volo di fantasia. Qui abbiamo due figure di alcuni grafici che abbiamo disegnato utilizzando il computer. Senza che vi diciamo le formule che abbiamo in mente, sapreste dirci quale grafico è "liscio", (in termini formali, quale è pertinente ad una funzione ovunque derivabile) e quale no? In termini informali, potreste chiedervi quale dei due grafici potrebbe non essere liscio, magari a causa di "angoli" dove il grafico cambia improvvisamente direzione.

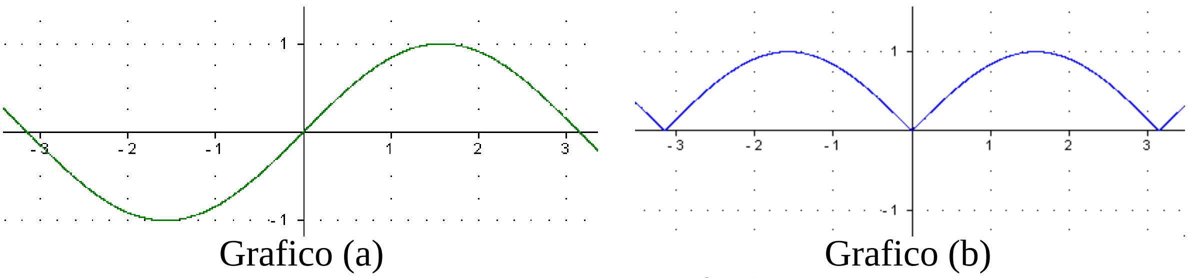
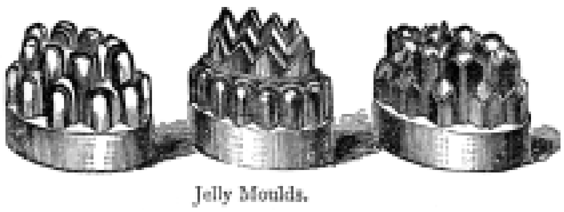


Figura 2 : Quale di questi grafici è "liscio"?

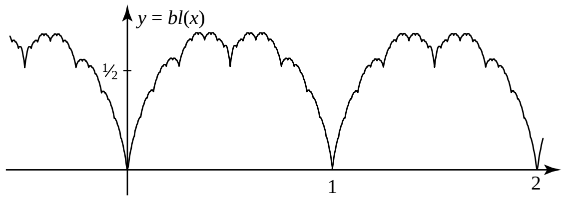
E' probabile dire immediatamente "il primo sembra essere sin(x), quindi è chiaramente liscio". Ci potrebbe volere di un po' di più per intuire che il secondo potrebbe essere il valore assoluto di sin(x), ottenuto facendo la riflessione lungo l'asse x delle parti negative per ottenere una curva; queste è liscia nella maggior parte dei punti, ma ha chiaramente degli angoli a 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, e così via. Questa è un'interpretazione molto ragionevole, date le informazioni a vostra disposizione.

Facciamo la conoscenza di una funzione molto corrugata

L'interpretazione "ragionevole", tuttavia, dipende dal fatto che coloro che hanno disegnato il grafico hanno usato la curva regolare del seno che noi tutti conosciamo. L'unica informazione che vi abbiamo fornito è la singola immagine del grafico di ciascuna curva; non vi abbiamo dato la formula di alcuna delle due funzioni, dunque state solo indovinando da ciò che potete vedere. In realtà, abbiamo in mente un'idea molto più contorta, che adesso vi cominceremo a svelare. Fateci cominciare con il presentarvi una funzione che potreste non aver mai visto prima, chiamata la funzione blancmange (biancomangiare).Questo nome è stato suggerito da J. Mills, uno dei nostri colleghi, il quale vide una somiglianza tra la forma di questa funzione e quella di un budino inglese fatto di gelatina di latte aromatizzata. La figura 3 (presa da un ricettario vittoriano del tardo diciannovesimo secolo intitolato *La cucina quotidiana di Warne*) mostra tre differenti stampi per fare gelatine. Accanto c'è la funzione blancmange, che mostra i tratti tipici di famiglia. Tuttavia vi dobbiamo avvertire che sebbene i budini biancomangiare sembrano moderatamente lisci (e appiccicosi) al tatto, la funzione blancmange è estremamente corrugata, in un modo molto astuto.



Stampi per gelatina per fare il blancmange



La funzione blancmange

Figura 3: L’origine del nome “blancmange”

Lo scherzo qui è che la parola inglese “blancmange” è costruita a partire da due parole francesi, “blanc” (bianco) e “mange” (mangiare). Quando la funzione blancmange è stata introdotta per la prima volta ad accademici ed insegnanti francesi durante un seminario a Parigi, il pubblico era veramente perplesso. Dicevano: “Cos’è questo ‘bianco-mangiare’?”. Venne loro spiegata l’origine del nome e i Francesi furono soddisfatti. Era ciò che loro chiamano un “pudding”[1]. Come sempre i francesi e gli inglesi hanno qualche difficoltà a capirsi reciprocamente, in questo caso perché gli inglesi utilizzano il termine francese “blancmange” ed i francesi usano il termine inglese “pudding”.

E così, cos’è questa leggendaria funzione “blancmange”? E’ una funzione la cui costruzione è stata specificata dal matematico giapponese Takagi nel 1904. Forse la dovremmo chiamare la funzione di Takagi in suo onore. Forse… Ma la parola anglo-francese “blancmange” che genere confusione in entrambi i paesi è molto più divertente! Per continuare con la metafora del budino, dobbiamo cominciare a pensare agli ingredienti per realizzarla.

La ricetta per fare il biancomangiare

La funzione blancmange è costruita in passi successivi. Il primo passo è un dente di sega che cresce linearmente fino ad altezza ½ e decresce a 0 in ogni intervallo unitario (figura 4). Questa funzione potrebbe essere calcolata “la distanza dal più vicino numero intero”. Indicando questa funzione con s, la si può anche calcolare per ciascun x reale come segue:

- calcolare la parte intera di x, ovvero il più grande numero intero n minore di x,
- calcolare la parte decimale di x, $d = x - n$,
- se $d \leq \frac{1}{2}$ allora $s(x) = d$, o altrimenti (se $d > \frac{1}{2}$) allora $s(x) = 1 - d$.

Per esempio, se $x = 3.23$, allora $n = 3$ e $d = 0.23$, quindi, dato che $d \leq \frac{1}{2}$, otteniamo $s(x) = 0.23$. D’altra parte, se $x = 2.75$, allora $n = 2$ e $d = 0.75$ così ora $d > \frac{1}{2}$, dunque $s(x) = 1 - d = 0.25$.

Questa definizione procedurale può sembrare curiosa a coloro che sono abituati ad avere le funzioni date da formule che coinvolgono polinomi, funzioni

[1] budino in inglese, *n.d.t.*

trigonometriche e simili, ma essa è molto più facile di ciascuna di queste ultime da definire in un programma per il computer. In questo senso, in questi giorni di computer, la funzione dente di sega è una funzione molto naturale (Figura 4.)

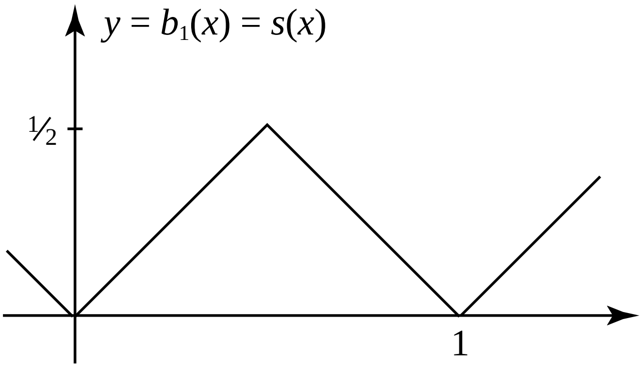


Figura 4: Il grafico della funzione dente di sega, $y = s(x)$

Questa è la prima approssimazione della funzione blancmange:

$$b_1(x) = s(x).$$

Successivamente consideriamo una funzione dente di sega grande la metà, indicata con $s_2(x)$, ovvero che cresce fino ad altezza 1/4 e decresce a zero 0 due volte in ciascun intervallo unitario (figura 5). Questa può essere calcolata dalla formula:

$$s_2(x) = \tfrac{1}{2} s(2x).$$

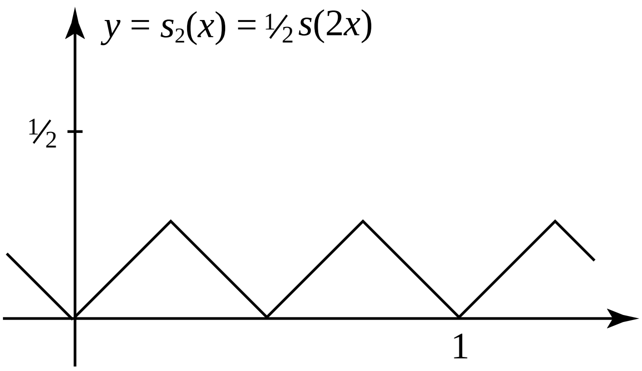


Figura 5: un dente di sega grande la metà

Sommando le due funzioni dente di sega insieme otteniamo la seconda approssimazione $b_2(x)$, dove:

$$\begin{aligned} b_2(x) &= s(x) + s_1(x) \\ &= s(x) + \tfrac{1}{2} s(2x). \end{aligned}$$

(figura 6).

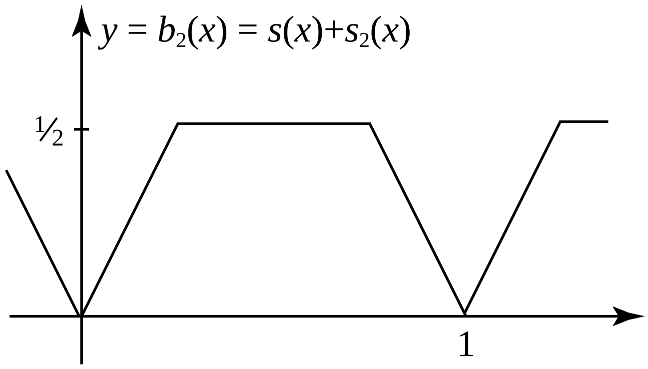


Figura 6: la somma di due funzioni dente di sega, una ordinaria e l'altra di dimensione metà

Successivamente consideriamo un dente di sega di dimensione un quarto (figura 7) e la aggiungiamo a $b_2(x)$ per ottenere la terza approssimazione (figura 8).

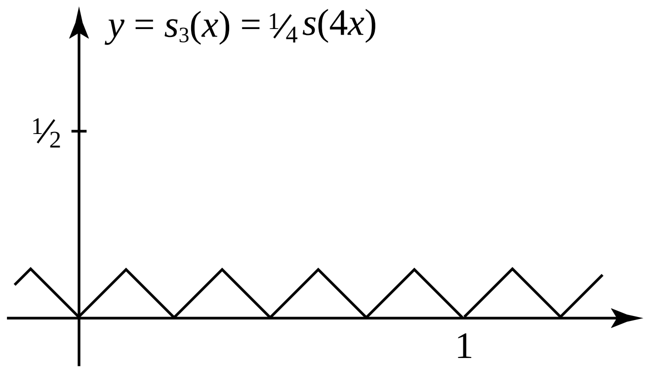


figure 7: una funzione dente di sega di dimensione un quarto

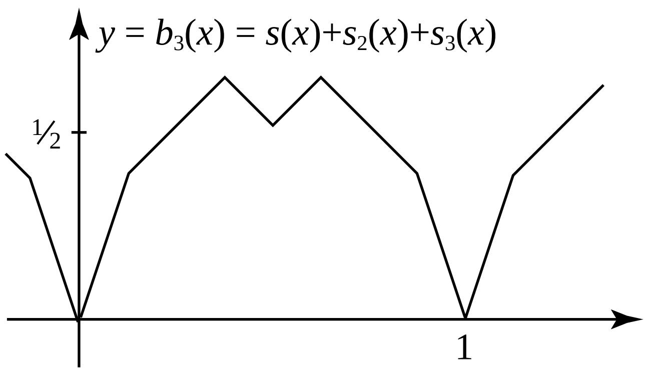


figura 8: somma di una funzione dente di sega di dimensione un quarto a $b_2(x)$ per ottenere $b_3(x)$

Proseguiamo in questo modo, considerando ad ogni passo una funzione a dente di sega di dimensione metà, ovvero $s_{n+1}(x) = \frac{1}{2} s_n(2x) = \frac{1}{2^{n+1}} s_1(nx)$, e sommandola alla approssimazione $b_n(x)$ della funzione biancomangiare ottenuta al passo precedente per ottenerne una migliore. Possiamo immaginare che questo processo prosegua indefinitamente, ma in una situazione pratica, ad esempio disegnando su uno schermo televisivo, le funzioni a dente di sega che si sommano via via diventano così piccole che la figura si stabilizza (dopo circa otto passi sulla maggior parte dei VDU moderni). (Figura 9.)

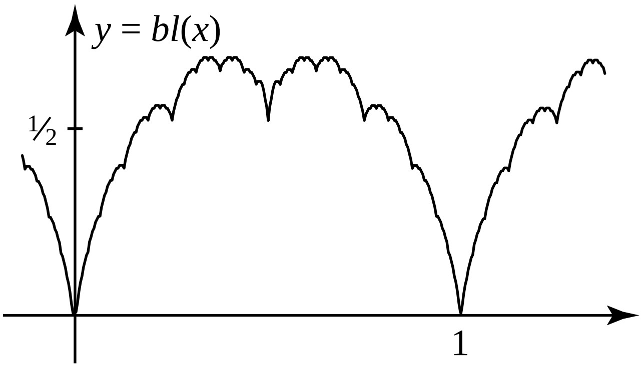


Figura 9: la funzione blancmange

La funzione blancmange è continua ovunque ma non è derivabile in alcun punto

La funzione blancmange viene definita rigorosamente come la somma della serie di funzioni a dente di sega che abbiamo sopra esaminato. Per ogni numero reale x , si consideri la serie:

$$s_1(x)+s_2(x)+\ldots+s_n(x)+\ldots=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(x)$$

Dato che per ogni numero reale x abbiamo:

$$0\le s(x)\le\frac{1}{2}\text{ e, più in generale, }0\le s_n(x)\le\frac{1}{2^n},$$

possiamo vedere che le approssimazioni successive:

$$b_n(x)=s_1(x)+s_2(x)+\ldots+s_n(x)=\sum_{j=1}^{n}s_j(x)$$

soddisfano le seguenti condizioni:

$$\forall n\in\mathbf{N}\quad 0\le b_n(x)\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=b_{n+1}(x)\le 1$$

quindi la successione $b_1(x)$, $b_2(x)$, ... è una successione monotòna crescente, limitata superiormente da 1. Ciò è sufficiente per concludere che per ogni numero reale x, $b_n(x)$ è una successione convergente ad un limite (minore od uguale ad 1), dunque la serie delle funzioni a dente di sega è puntualmente convergente su tutto l'insieme dei numeri reali. Possiamo allora definire una nuova funzione dai reali in sé:

$$\begin{aligned} bl(x)&:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\\ x&\mapsto\sum_{j=1}^{\infty}s_j(x)\text{'}\end{aligned}$$

ottenendo finalmente la funzione blancmange. In principio non potremo dire ancora nulla riguardo le sue proprietà, ma è possibile dimostrare che la convergenza della serie delle funzioni a dente di sega è uniforme, dunque la funzione blancmange, essendo somma uniforme di una serie di funzioni continue, è essa stessa continua.

E' però un tipo molto corrugato di funzione continua, che non sembra essere liscia da alcuna parte. Se ingrandiamo l'immagine per osservare la funzione blancmange da vicino, accade una cosa strana: l'immagine non cambia, e delle piccole blancmange appaiono un po' ovunque!

Per capire il motivo per cui ciò accade, esaminiamo ciò che sarebbe accaduto se avessimo lasciato da parte la prima funzione a dente di sega e avessimo considerato la somma di tutte le altre. Avremmo cominciato con una funzione a dente di sega grande la metà e successivamente aggiunto funzioni a dente di sega ciascuna di dimensione metà della precedente. Avremmo dunque ottenuto la stessa forma di prima, solo grande la metà, il risultato sarebbe cioè stato una funzione *blancmange di dimensione metà* (figura 10). (La formula per essa è semplicemente $\frac{1}{2}bl(2x)$.)

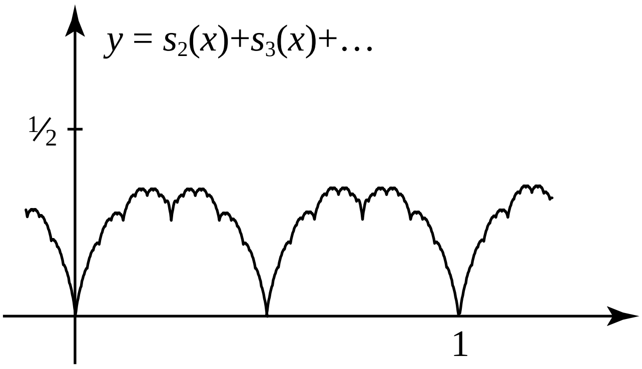


Figura 10: una blancmange grande la metà

Aggiungendo ora la prima funzione a dente di sega, ovvero $b_1(x)$, scopriamo che la funzione blancmange è la somma di questa e della funzione blancmange grande la metà (figura 11).

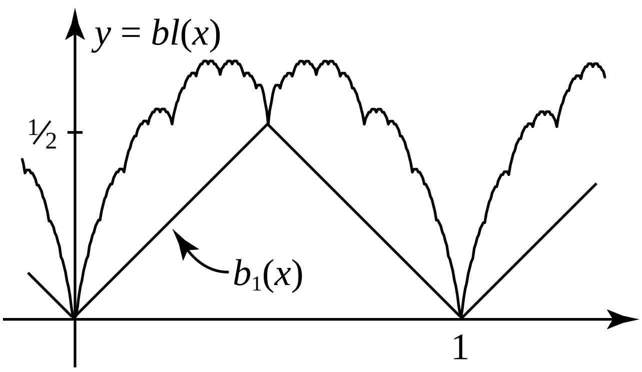


Figura 11: La funzione blancmange come somma della $b_1(x)$ più la blancmange grande la metà

In questo caso in ciascun mezzo intervallo abbiamo una blancmange grande la metà posta su ciascun lato della prima funzione a dente di sega, deformata verso l'alto. E' come se ciascuna mezza blancmange fosse stata posta su di un piatto piano, inclinato di 45°. Invece di scivolare via come avrebbe fatto un normale biancomangiare di gelatina, la blancmange viene deformata solo verso l'alto per un fattore che varia fra 0, nella parte più bassa del dente, ed nel punto più alto (figura 12).

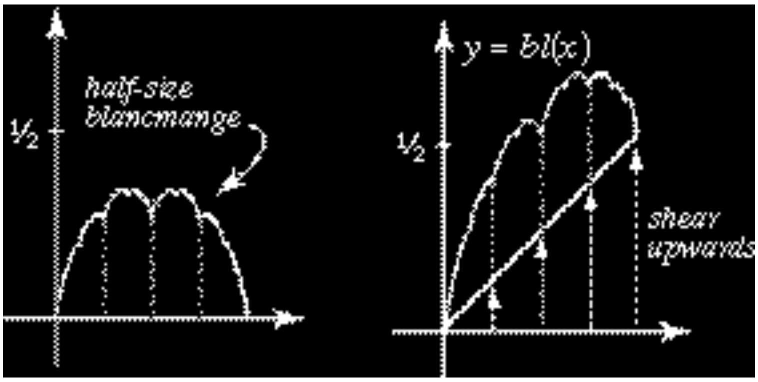


Figura 12: deformazione di mezza blancmange

L'idea probabilmente diventa più chiara continuando con il dente successivo. Lasciando da parte le prime due funzioni a dente di sega mostrate in figura 6, ovvero $b_2(x) = s_1(x) + s_2(x)$, cominciamo a sommare le rimanenti a partire dalla terza (di dimensione un quarto). Il risultato è una *blancmange di dimensione un quarto*. La blancmange completa si presenta allora come la somma delle prime due funzioni a dente di sega più una blancmange di dimensione un quarto (figura 13).

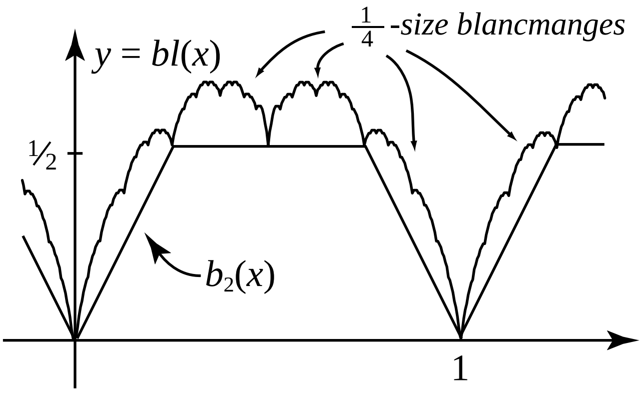


Figura 13: La blancmange come somma di $b_2(x)$ e di un quarto di blancmange

In generale abbiamo:

$$bl(x) = b_n(x) + \frac{1}{2^n} \text{ di blancmange}$$

Ciascuna approssimazione $b_n(x)$ è costituita da segmenti di linea retta su ciascun intervallo dell'asse delle x di lunghezza $\frac{1}{2^n}$. Su ciascuno di questi intervalli, si aggiunge la blancmange di dimensione $\frac{1}{2^n}$ a $b_n(x)$ per ottenere la blancmange completa. La figura 14 mostra $b_4(x)$ sovrapposta alla blancmange completa: si possono vedere chiaramente delle piccole blancmange su ciascun tratto orizzontale di $b_4(x)$, mentre sui tratti obliqui esse sono deformate verticalmente per adattarsi al segmento di retta.

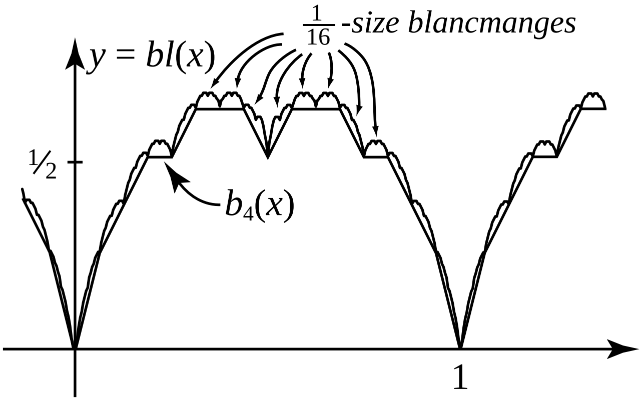


Figura 14: le blancmange crescono ovunque!!

Proseguendo in questo modo possiamo convincerci che per ogni intervallo di lunghezza $\dfrac{1}{2^n}$ possiamo trovare una piccola funzione blancmange di dimensione $\dfrac{1}{2^n}$. Questo spiega perché guardando la blancmange da vicino continuiamo a vedere tante piccole blancmange, e l'immagine sostanzialmente non cambia. Se ricordiamo che ingrandendo il grafico di una funzione derivabile in un punto attorno ad esso vedremmo, alla fine, una linea retta, ci possiamo rendere conto di aver trovato il controesempio supremo: la funzione blancmange è una funzione che non appare mai liscia in alcun punto! In termini tecnici, è una funzione continua che non è derivabile in alcun punto.

Il momento migliore per introdurre tale funzione agli studenti è una questione di gusto personale dell'insegnante. Molto potrebbero considerarla troppo difficile per gli allievi più deboli ad uno stadio iniziale, ma tendenzialmente è possibile cominciare a lavorarci in modo sperimentale abbastanza presto, magari usando un programma per il computer che permette agli studenti di ingrandire a piacere una qualunque parte del grafico di una data funzione. Sebbene i *tecnicismi* siano difficili, L'idea di una funzione "arricciata" non lo è. Essa può aiutare gli studenti a realizzare la natura speciale di quei grafici più lisci che appaiono retti quando delle loro piccole porzioni vengono ingrandite. Queste proprietà altamente specializzata è alle fondamenta del calcolo differenziale (Tall, 1982, 1985.)

Alcune idee sorprendenti

La funzione blancmange ha delle proprietà singolari. Tanto per cominciare il fatto di non essere derivabile in alcun punto è già strano, ma c'è dell'altro. Dal modo stesso in cui è stata definita, essa è chiaramente simmetrica in ciascun intervallo unitario rispetto all'asse dell'intervallo stesso. Dato che la funzione ha chiaramente almeno un massimo relativo che non corrisponde al punto medio dell'intervallo, la proprietà di simmetria ci fa concludere che ce ne devono essere almeno due, disposti simmetricamente rispetto all'asse. Di fatto è ancora più interessante: se guardiamo di nuovo alla figura 14, possiamo vedere un certo numero di piccole blancmange in cima al grafico, e ciascuna di queste ha almeno due massimi relativi. Ingrandendo ulteriormente l'immagine, vediamo molti altri massimi relativi. Di fatto la funzione blancmange ha un numero infinito di massimi relativi in ciascun intervallo unitario. Poiché non è derivabile, non è possibile trovare questi massimi con la procedura standard di annullamento della derivata prima. Forse potreste aver voglia di pensare dove sono situati questi massimi e qual è il valore assunto dalla funzione blancmange a questi punti.

Un altro trucco è quello di considerare una funzione blancmange di piccolissima scala, diciamo un millesimo della funzione originaria. Essa può essere espressa dalla formula:

$$r(x) = \frac{bl(1000x)}{1000}$$

Il suo grafico ha valori compresi tra 0 ed $1/1000$, e quindi se lo disegnassimo su un pezzo di carta in scala ordinaria non riusciremmo a distinguerlo dall'asse delle x. (Figura 15).

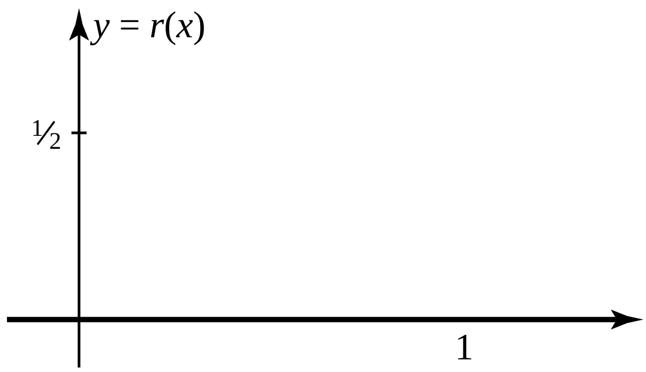


Figura 15: Il grafico di una piccola funzione "ruvida", $r(x)$

Se però ingrandiamo l'immagine di un fattore all'incirca 100, vedremo le piccole blancmange apparire (figura 16).

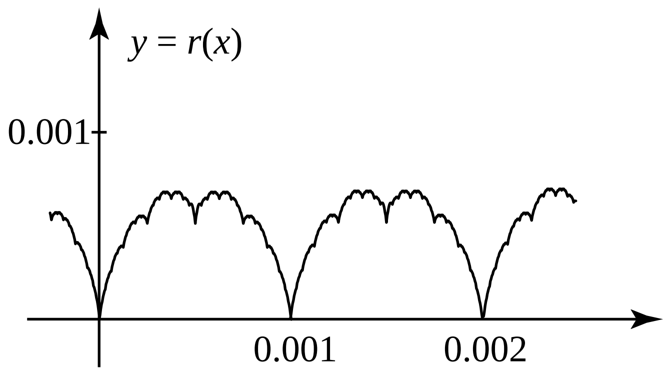


Figura 16: Il grafico della funzione "ruvida", $r(x)$, molto ingrandito

Prendiamo ora in esame una *qualunque* funzione derivabile $f(x)$, come possono essere $f(x) = x^2$ o $f(x) = \sin(x)$; se consideriamo la funzione $g(x) = f(x) + r(x)$, essa non può essere derivabile in alcun punto, perché se lo fosse allora la funzione $r(x) = g(x) - f(x)$ risulterebbe somma algebrica di funzioni derivabili e dunque essa stessa derivabile, mentre sappiamo che $r(x)$ è talmente tanto "arricciata" da non essere derivabile in alcun punto. D'altra parte i due grafici di $f(x)$ e $f(x) + r(x)$ sembrano identici quando disegnati ad una scala normale (figure 17, 18).

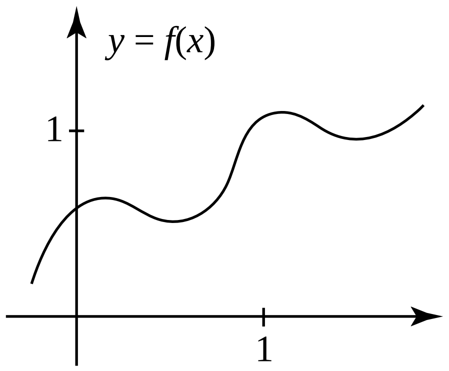


Fig. 17: Un funzione ovunque derivabile

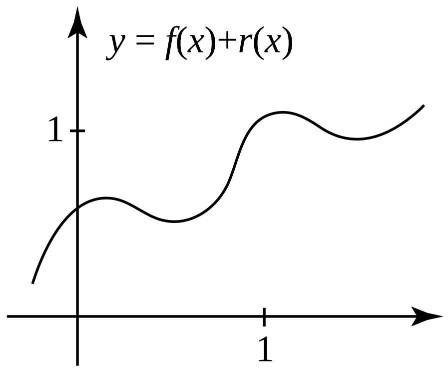


Fig. 18: Una funzione non derivabile in alcun punto.

Questa affascinante osservazione è illuminante. Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per al massimo $1/1000$ di unità, in modo da non poter essere distinte una figura disegnata in scala normale. Eppure una di esse è derivabile ovunque mentre l'altra non lo è in alcun punto. Questo vuol dire che semplicemente guardando ad una singola figura, senza avere alcuna altra informazione, *non si può vedere se il grafico rappresenta una funzione derivabile oppure no!* Naturalmente, se si ha a disposizione la possibilità di ingrandire un grafico disegnato da un computer, la differenza potrebbe diventare evidente ad una scala di ingrandimento maggiore, ma non si può mai essere certi. Cosa succederebbe se una funzione "ruvida" molto più piccola, diciamo $10^{-10^{100}} bl(10^{10^{100}} x)$ venisse aggiunta alla funzione considerata? Come potremmo mai essere certi che alla funzione di cui "vediamo" il grafico non è stata aggiunta una funzione "ruvida" di dimensione insondabile? L'unico modo di essere certi è di conoscere precisamente qual è la funzione in esame, un'unica figura non è sufficiente.

Guardiamo di nuovo le figure originali

È giunto il momento di guardare alle figure all'inizio dell'articolo. La prima può sembrare essere $\sin(x)$, ma non vi abbiamo detto che la sua formula è $\sin(x) + r(x)$, dunque quando viene ingrandita circa mille volte mostra i contorni ruvidi delle piccole blancmange che crescono un po' ovunque . Quindi, contrariamente alle aspettative, il grafico (a) non è affatto liscio, anzi, *non è liscio in nessun punto*!

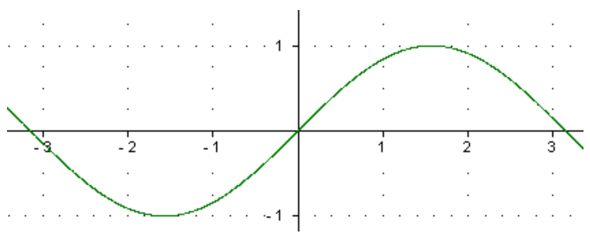


Figura 19: Grafico (a), $y=\sin(x)+r(x)$

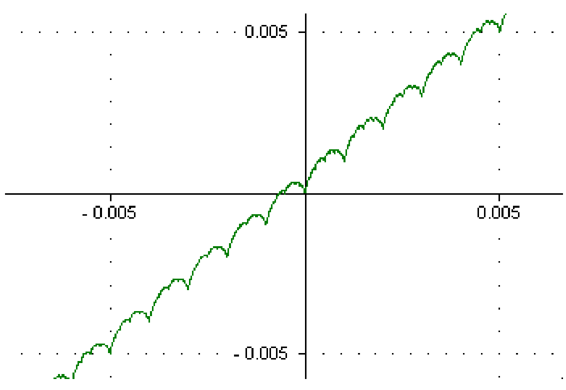


Figura 20: ingrandimento del grafico (a)

A questo punto potreste essere sospettosi del grafico (b), e fate bene ad esserlo, dato che via abbiamo di nuovo ingannato. Esso non è il grafico del valore assoluto del sin(x), la cui formula potrebbe essere scritta come

$$f(x) = |\sin(x)| = \sqrt{\sin^2(x)}$$

Se ingrandissimo quest'ultimo grafico, allora esso *avrebbe avuto* una cuspide all'origine (figura 21).

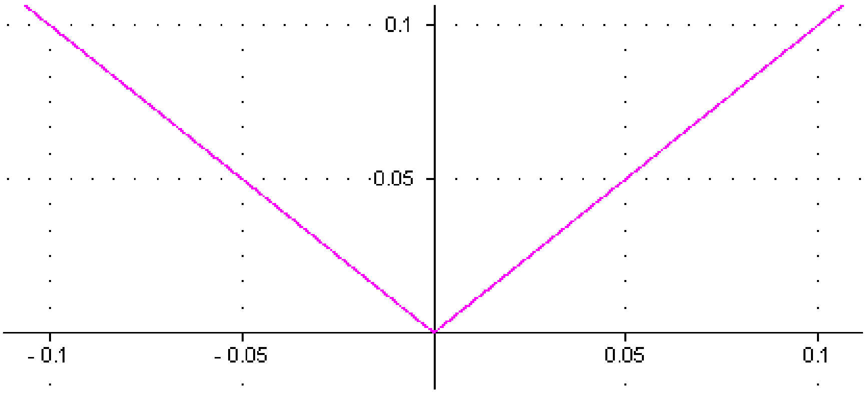


Figura 21: Ingrandimento del grafico y=|sinx| all'origine

Ma noi non abbiamo disegnato questo grafico. Ciò che abbiamo disegnato di fatto è quasi la stessa cosa, ma non proprio. Il nostro grafico (b) ha la formula:

$$f(x) = \sqrt{\sin^2(x) + 0.000001}$$

Calcolando il suo valore per $x = 0$ otteniamo $f(0) = \sqrt{0.000001} = 0.001$, ed il grafico ingrandito attorno all'origine è fornito in figura 23.

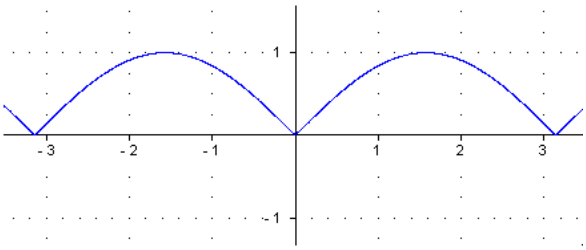


Fig. 22: Grafico (b)
$f(x) = \sqrt{\sin^2(x) + 0.000001}$

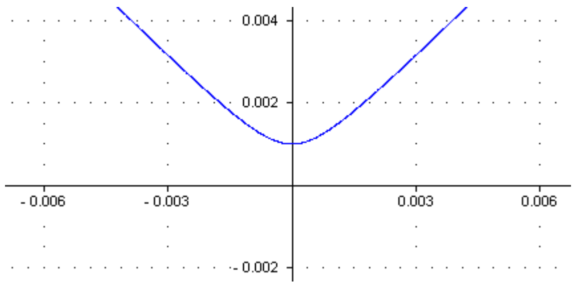


Fig. 23: Ingrandimento del grafico (b) all'origine

Quindi il grafico (b) *non ha alcuna cuspide*. È piuttosto liscio, ed infatti è una funzione costruita a partire da funzioni derivabili standard, e dunque è essa stessa derivabile su tutto l'asse reale.

Questa discussione ha mostrato che non possiamo aspettarci di interpretare un grafico a partire da una singola figura, a meno che non siamo sicuri di conoscere cosa il grafico rappresenta precisamente. La nostra intuizione ci può aver detto che il grafico (a) appariva liscio ed il grafico (b) aveva dei punti angolosi, ma adesso che sappiamo esattamente cosa essi rappresentano possiamo affermare che è vero esattamente il contrario. La funzione rappresentata dal grafico (a) è così arricciato da non essere derivabile in alcun punto, mentre quella rappresentata dal grafico (b) è ovunque derivabile.

Morale: non fatevi raggirare in futuro! Se non vi viene detto esattamente cosa rappresenta una figura, allora la vostra intuizione potrebbe ingannarvi. L'intuizione è un ottimo aiuto, ma in matematica avanzata avete bisogno di addestrarla ad essere più rigorosa per comprendere appieno le situazioni che vi vengono sottoposte.

Bibliografia

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge: CUP. (Edito nuovamente nel 1967 con una premessad i C. P. Snow.)

Takagi, T. (1903). A simple example of the continuous function without derivative, *Proc. Phys.-Math.* Japan, 1, 176-177.

Tall, D. O. (1982). The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere, *Mathematical Gazette* 66, 11-22.

Tall, D. O., (1985). Understanding the calculus, *Mathematics Teaching*, 110, 49-53.

Nota: Gli articoli di David Tall sono disponibili per il download all'indirizzo: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall.