SUPERFICIES RACIONALES SOBRE UN CUERPO

DAMIANO TESTA Y ANTHONY VÁRILLY-ALVARADO

Resumen. Damos una exposición del Teorema de Iskovskikh-Manin. Este teorema clasifica las superficies racionales definidas sobre un cuerpo cualquiera, reduciendo el problema a dos clases de superficies: las superficies de del Pezzo y las fibraciones en cónicas sobre cónicas.

Estas notas complementan y completan las clases virtuales de la Primera Parte de la Escuela Online IMPA - ICTP "AGRA IV - Aritmética, Grupos y Análisis." Los videos del curso se encuentran en el canal de YouTube del ICTP.

Introducción

El tema central del presente curso es una demostración del Teorema de Iskovskikh-Manin.

Teorema (Iskovskikh-Manin)**.** *Sea X una superficie racional, suave, proyectiva y geométricamente íntegra definida sobre un cuerpo k cualquiera. Existe una superficie suave, proyectiva y geométricamente íntegra Y definida sobre k y un morfismo biracional $\pi\colon X \to Y$ tal que la superficie Y es*

- *una superficie de del Pezzo, o*
- *una fibración en cónicas sobre una cónica.*

Definiremos las superficies de del Pezzo y las fibraciones en cónicas sobre cónicas más adelante. Por el momento, basta con decir que son dos clases de superficies racionales bien estudiadas desde los puntos de vista geométrico y aritmético, con carácteristicas harto marcadas y específicas (véase, en el caso de las superficies de del Pezzo, el artículo expositorio [VA13]).

Nuestra herramienta principal para demostrar el Teorema de Iskovskikh-Manin es el *Teorema del Cono*. Comenzamos por resumir el contexto del dicho teorema, ignorando por ahora numerosos detalles de tamaño variado. A través del curso especializaremos las hipótesis progresivamente, cuando sea necesario. El programa descrito en esta introducción se puede realizar casi tal cual en el caso de superficies racionales definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Dada una variedad suave, proyectiva, geométricamente irreducible X definiremos

- un espacio vectorial real V de dimensión finita; (el espacio de las curvas $N_1(X)_{\mathbb{R}}$)
- un cono $\mathcal{C} \subset V$; (el cono cerrado de curvas $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ sobre X)

Date: 18 de agosto de 2021.

Várilly-Alvarado ha contado con el apoyo de las becas DMS-1352291 y DMS-1902274 de la National Science Foundation, EE.UU., durante la preparación de estas notas.

- una forma lineal $\kappa\colon V \to \mathbb{R}$; (la intersección con un divisor canónico $K_X \cdot -\colon N_1(X)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Los vectores de V se pueden interpretar como curvas contenidas en X.

La forma lineal κ separa el espacio vectorial V en dos partes: la parte positiva $V_+ = \kappa^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y la parte negativa $V_- = \kappa^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0})$. El Teorema del Cono da una estructura (casi) poliedral a la parte negativa del cono $\mathcal{C}$: la intersección $\mathcal{C} \cap V_-$ es generada por un conjunto numerable de vectores/curvas, que sólo se pueden acumular en el hiperplano $\kappa^{-1}(0)$.

Aunque a primera vista esta descripción parece poco informativa, veremos que nos guiará hacia un teorema estructural de clasificación muy preciso. La estrategia que seguiremos será de "simplificar" el cono eliminando, una a la vez, las curvas mencionadas en el Teorema del Cono. Dada una de estas curvas C, construiremos

- una variedad suave proyectiva X',
- un morfismo $c\colon X \to X'$,
- el espacio vectorial V' asociado a X', análogo al espacio V por X,
- el mapa lineal $c_*\colon V \to V'$ inducido por c.

A partir de las definiciones se seguirá que el mapa c_* es sobreyectivo y su núcleo es generado por C. Por lo tanto, este proceso se puede repetir de forma inductiva, comenzando con la nueva variedad X'.

En el caso de superficies racionales, si la dimensión de V es por los menos 3, veremos que el morfismo $c\colon X \to X'$ es el blow-up de un punto de X'. Entonces, sólo nos quedan por analizar las superficies racionales para las cuales el espacio V es de dimensión 1 o 2.

- Si la dimensión de V es 1, geométricamente la superficie X es isomorfa a $\mathbb{P}^2$.
- Si la dimensión de V es 2, geométricamente la superficie X admite un morfismo $X \to \mathbb{P}^1$ cuyas fibras son isomorfas a $\mathbb{P}^1$.

En el segundo caso, el morfismo $X \to \mathbb{P}^1$ es llamado un "fibrado en cónicas". Observamos también que incluso este último morfismo $X \to \mathbb{P}^1$ sigue el mismo patrón que nos condujo a encontrar los blow-ups: o sea, el morfismo $X \to \mathbb{P}^1$ se obtiene de la misma manera que los morfismos $c\colon X \to X'$, a partir de una contracción del cono $\mathcal{C}$ de X. Este punto de vista es de gran utilidad conceptual dentro del "Programa de Modelos Minimales" de Mori. De hecho, cuando empezamos con una superficie X y llegamos a $\mathbb{P}^2$ o a $\mathbb{P}^1$ a partir de una sucesión de contracciones, el programa de Mori continua con un último morfismo constante $\mathbb{P}^2 \to \mathrm{pt}$ o $\mathbb{P}^1 \to \mathrm{pt}$ a un punto, donde el programa arriva a su conclusión inexorable.

Convenciones. A lo largo de estas notas, k denotará un cuerpo. Nuestro objectivo es imponer tan pocas hipótesis sobre k como sea posible.

Sean X y Y dos esquemas. Un mapa racional $f\colon X \dashrightarrow Y$ está dado por un abierto de Zariski denso $U \subset X$ y un morfismo $U \to Y$. Identificamos dos mapas racionales $f, g\colon X \dashrightarrow Y$ si existe un abierto de Zariski denso $V \subset X$ tal que f y g están definidos sobre V y coinciden como funciones $V \to Y$. Un mapa biracional es un mapa racional $f\colon X \dashrightarrow Y$ que induce un isomorfismo entre abiertos densos de Zariski de X y de Y.

Para nosotros, una variedad es una *variedad algebraica*, o sea, un esquema integral, separado y de tipo finito sobre un cuerpo k. Casi todas las variedades que veremos serán proyectivas sobre k. Observamos que si X es un esquema proyectivo sobre k, entonces es automáticamente separado y de tipo finito.

Sea X una variedad definida sobre un cuerpo k. Diremos que X es tuanis[1] si X es suave, proyectiva y geométricamente irreducible.

Sea X una variedad tuanis. Un divisor íntegro sobre X es un esquema íntegro $D \subset X$ de codimensión 1. Al ser X suave, cada divisor $D \subset X$ admite, localmente, una presentación como el lugar geométrico de las soluciones de una sóla ecuación. Los divisores con esta propiedad se llaman divisores de Cartier. Casi no utilizaremos esta definición fuera de la introducción.

Recordemos que, para una variedad tuanis X, el haz canónico ω_X de X es el producto exterior $\bigwedge^{\dim X} \Omega_{X/\operatorname{Spec} k}$ de mayor grado del haz de diferenciales $\Omega_{X/\operatorname{Spec} k}$ [Har77, II, §8]. Un divisor canónico K_X de X es un divisor de X tal que $\mathscr{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$. El conjunto de todos los divisores canónicos es exactamente una clase de equivalencia lineal. Es un ejercicio útil verificar que todas las veces que hablamos de un divisor canónico, las afirmaciones son independientes del representante de la clase de equivalencia. De vez en cuando, puede incluso que hablemos de *el* divisor canónico.

Curva significa variedad de dimensión 1, y superficie significa variedad de dimensión 2. Nuestro enfoque principal es el estudio de superficies tuanis. En cambio, utilizaremos las curvas para obtener información sobre las superficies. Por esta razón, normalmente, las curvas en este curso serán de dimensión pura igual a 1, pero frecuentemente podrán admitir singularidades, ser reducibles y no reducidas, aunque siempre asumimos que no tienen puntos inmergidos. Equivalentemente, si $C \subset X$ es una curva contenida en una superficie tuanis, entonces C es un divisor de Cartier efectivo.

Una superficie de del Pezzo es una superficie tuanis con divisor canónico anti-amplio; o sea, una superficie tuanis X es una superficie de del Pezzo si el divisor $-K_X$ es amplio.

Una fibración en cónicas es una superficie tuanis X sobre un cuerpo k que admite un morfismo $c\colon X \to C$ sobre k, donde C es una curva tuanis y la fibra genérica geométrica de c es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

La architectura del curso tiene en mente el caso en que X es una superficie racional tuanis. Para nosotros, "racional" significa "geométricamente racional": existen una extensión finita $k' \supset k$ de cuerpos y un mapa biracional $X \times \operatorname{Spec} k' \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{k'}$. En otros contextos, la racionalidad, a veces también llamada k-racionalidad, require un mapa biracional $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2_k$ definido sobre el cuerpo base k. Destacamos que la definición que mejor se adapta a nuestros razonamientos es la que permite una extensión del cuerpo base.

El Apéndice A contiene definiciones precisas de los elementos básicos de la teoría de conos.

[1]Tuanis es una palabra de origen Salvadoreño, un vestigio del Malespín, utilizada de forma coloquial en Costa Rica y Nicaragua, donde se cree que su origen es un anglicismo deformado de "too nice". En inglés, las hipótesis "smooth, projective, and geometrically irreducible" se abrevian con el adjetivo "nice" [Poo17, Definition 3.5.68 y Remark 3.5.69]. Por ello, el término *tuanis* nos pareció appropiado.

Referencias. Escribimos estas notas consultando más que todo el libro de Kollár [Kol96], el artículo de Mori [Mor82], y las notas de Hassett [Has09]. Aconsejamos cálidamente mirar estas referencias detenidamente: son difíciles, pero extremadamente útiles e informativas. Para el caso de superficies sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, aconsejamos también los libros de Debarre [Deb01], de Matsuki [Mat02], y de Ciliberto [Cil20]. Para la mayoría de los preliminarios de geometría algebraica, hemos usado el libro de Hartshorne [Har77]. Aconsejamos también los libros de Bădescu [Băd01] y de Beauville [Bea96] sobre superficies, y los libros de Lazarsfeld [Laz04a, Laz04b] sobre la geometría algebraica más en general. Para resultados más avanzados, aconsejamos también el Stacks Project [Stacks] y, naturalmente, los tomos de los *Éléments de géométrie algébrique* [EGAI]··· [EGAIV-4], curados por Grothendieck.

1. Preliminares

En general, dada una variedad X tuanis (o sea, suave, proyectiva y geométricamente irreducible) definida sobre un cuerpo k, el Teorema del Cono explota la dualidad entre dos espacios vectoriales reales.

Por un lado, tenemos el espacio vectorial real $\operatorname{Div} X$ de los divisores sobre X, compuesto por combinaciones lineares formales de divisores íntegros de X, con coefficientes en $\mathbb{R}$. Por otro lado, tenemos el espacio vectorial real $\operatorname{Cur} X$ de las curvas sobre X, compuesto por combinaciones lineares formales de las curvas íntegras de X, con coefficientes en $\mathbb{R}$. La notación $\operatorname{Cur} X$ es idiosincrática y la utilizaremos poco en este curso.

Los espacios vectoriales $\operatorname{Div} X$ y $\operatorname{Cur} X$ *dependen* del cuerpo base: habrá más divisores y más curvas (sobre la variedad X) definidos sobre una extensión del cuerpo k que definidos sobre k. Es importante tener a mente que casi todas las construcciones en este curso son compatibles con extensiones del cuerpo base.

Entre los dos espacios vectoriales $\operatorname{Div} X$ y $\operatorname{Cur} X$ existe un emparejamiento bilinear

$$- \cdot - \colon \operatorname{Div} X \times \operatorname{Cur} X \to \mathbb{R},$$

llamado *forma de intersección*. Este emparejamiento no es perfecto (¡por mucho!). Sin embargo, induce un emparejamiento perfecto entre los cocientes respectivos de $\operatorname{Div} X$ y $\operatorname{Cur} X$ por los núcleos izquierdo y derecho del emparejamiento original. Dichos cocientes resultan ser espacios vectoriales reales de dimensión *finita*.

Observación 1.1. A lo largo de este curso, vamos a cambiar frecuentemente entre combinaciones lineales de clases de divisores/curvas con coeficientes en $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y en $\mathbb{R}$. Cada una de estas elecciones tiene consecuencias que se aprecian mejor con la experiencia y con ejemplos. El Ejemplo 1.6 da algunas pistas de como los coeficientes interactuan con las definiciones.

Pronto nos enfocaremos en el caso de superficies, para el cual los divisores y las curvas coinciden, y por tanto $\operatorname{Div} X$ y $\operatorname{Cur} X$ son iguales. Sin embargo, en esta introducción mantendremos la distinción entre estos dos espacios vectoriales para esclarecer algunos puntos sobre los papeles que juegan.

Comenzamos por definir la forma de intersección de dos maneras aparentemente distintas, cada una con propiedades útiles para nuestros propósitos, cuya equivalencia demostraremos a continuación. En ambos casos, definiremos la forma de intersección entre un divisor íntegro y una curva íntegra; luego extenderemos por linealidad a todo el producto $\operatorname{Div} X \times \operatorname{Cur} X$.

Forma de intersección I: grados de esquemas de dimensión cero. Esta definición es la más intuitiva y también es la base del nombre *intersección*. Sean

- $D \subset X$ un divisor íntegro y
- $C \subset X$ es una curva íntegra.

Asumimos que la intersección esquemática $D \cap C$ es de dimensión cero y definimos

$$D \cdot C := \operatorname{gr} D \cap C. \tag{1.1}$$

La hipótesis de que la intersección esquemática $D \cap C$ es de dimensión cero equivale a asumir que C no está contenida en D. En este contexto, vale la igualdad

$$D \cdot C = \text{longitud } D \cap C.$$

La fórmula (1.1) define el producto de intersección en el subconjunto

$$\{(D, C) \in \operatorname{Div} X \times \operatorname{Cur} X \;\mid\; C \not\subset D\}$$

de $\operatorname{Div} X \times \operatorname{Cur} X$.

Observamos que, si $D \subset X$ es un divisor y $C \subset X$ es una curva, y si la dimensión de la intersección $D \cap C$ es cero, entonces el producto de intersección $D \cdot C$ es *no-negativo*. Esta propiedad de "positividad" será muy importante para nosotros. Al mismo tiempo, cuando la curva C está contenida en el divisor D, puede que el producto de intersección $D \cdot C$ sea negativo.

Para extender la definición del producto de intersección a todo el producto $\operatorname{Div} X \times \operatorname{Cur} X$, una técnica estandar es utilizar un "moving lemma", que nos permita reemplazar un par (D, C) con $C \subset D$ por otro par (D', C') con $C' \not\subset D'$, compatiblemente con las intersecciones ya definidas. Para ello, utilizamos que el grado es constante en familias planas, propias y con base conexa (i.e. el grado es *localmente constante* en familias planas y propias). De ahí tenemos la posibilidad de reemplazar un divisor D por D' si D y D' son fibras esquemáticas de una misma familia plana, propia y con base conexa de sub-esquemas de X. Similarmente, podemos reemplazar una curva C por C' si C y C' son fibras esquemáticas de una misma familia plana, propia y con base conexa de sub-esquemas de X.

Esta idea nos permite extender el producto de intersección parcialmente. Por ejemplo, podemos calcular la *auto-intersección* de una recta $\ell \subset \mathbb{P}^2$. En este caso, como el espacio ambiente es una superficie, divisores y curvas coinciden, y tiene sentido querer auto-intersecar un divisor/una curva. Utilizando lo que hemos visto, podemos reemplazar una copia de ℓ por otra recta distinta ℓ' y deducir que $\ell^2 = \ell \cdot \ell' = 1$. En el Ejemplo 1.9 veremos como demostrar el Teorema de Bézout utilizando estas ideas.

Desgraciadamente, no podemos utilizar este método en toda situación.

Construcción 1.2 (Blow-up de $\mathbb{P}^2_k$ en un punto)**.** Sea $p \in \mathbb{P}^2_k$ un punto y sea $X = \operatorname{Bl}_p \mathbb{P}^2_k$ el blow-up del plano proyectivo en p. Explícitamente, si $[x, y, z]$ son coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^2_k$ tales que el punto p tiene coordenadas $[0, 0, 1]$, entonces definimos

$$\operatorname{Bl}_p \mathbb{P}^2_k = \left\{ ([x, y, z], [u, v]) \in \mathbb{P}^2_k \times \mathbb{P}^1_k : \quad xv = yu \right\}.$$

La curva excepcional $E = \pi^{-1}(p) \subset X$ es la pre-imagen del punto p para la proyección $\pi \colon X \to \mathbb{P}^2_k$. En coordenadas, la curva E es la curva con ecuaciones $x = y = 0$. Es fácil de demostrar (¡ejercicio!) el isomorfismo $E \simeq \mathbb{P}^1_k$. Sea $C \subset \mathbb{P}^2_k$ una curva cualquiera. La curva $C = \pi^{-1}(C')$ es la transformada total de C'. La curva $\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C' \setminus \{p\})}$ se llama la transformada propia (o transformada estricta) de C'. La transformada total y la transformada propia de una curva que no contiene el punto p coinciden.

Por ejemplo, si $E \subset \operatorname{Bl}_p \mathbb{P}^2$ es el divisor excepcional del blow-up de $\mathbb{P}^2$ en un punto, entonces cada familia plana, propia y con base conexa que contenga E como fibra esquemática en un punto tiene, necesariamente, todas sus fibras esquemáticas iguales a E (o a un cambio de base de E por una k-álgebra). Por lo tanto, si quisiéramos calcular la intersección $E \cdot E$ todavía no tenemos una estrategia.

Para terminar la definición del producto de intersección, utilizamos la linealidad. En primer lugar, gracias a la $\mathbb{R}$-linealidad es suficiente definir el producto de intersección para los elementos de los grupos abelianos libres generados por las clases de divisores íntegros y curvas íntegras. Además, gracias a la aditividad de la longitud en sucesiones exactas, si $D, D' \subset X$ son divisores y $C, C' \subset X$ son curvas y los productos $D \cdot C$, $D \cdot C'$, $D' \cdot C$ y $D' \cdot C'$ ya están definidos, entonces deducimos que

$$(D + D') \cdot C = D \cdot C + D' \cdot C \qquad \text{y} \qquad D \cdot (C + C') = D \cdot C + D \cdot C'.$$

Combinando la invariancia en familias planas con la linealidad, podemos extender la forma de intersección a todo el producto $\operatorname{Div} X \times \operatorname{Cur} X$.

A continuación demostramos lo que parece ser una patología de la definición de la forma de intersección: una curva sobre una superficie con auto-intersección *negativa*. Este fenómeno resulta ser muy útil en la clasificación de superficies, pues una curva de este tipo es *rígida*.

Ejemplo 1.3 (Una curva negativa, versión 1.0)**.** Mantenemos la notación de blow-up introducida en la Construcción 1.2. Sea $X = \operatorname{Bl}_p \mathbb{P}^2_k$ el blow-up de $\mathbb{P}^2_k$ en el punto $p = [0, 0, 1]$. Sea $L' \subset \mathbb{P}^2_k$ una recta por p y sean $L = \pi^{-1}(L') \subset X$ la transformada total de L y $\tilde{L} \subset X$ la transformada propia de L. Empezamos por demostrar la igualdad $L = \tilde{L} + E$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la recta L' es la recta con ecuación $x = 0$. Entonces, la transformada total L de L' es la curva con ecuaciones

$$L\colon \begin{cases} x &= 0 \\ xv &= yu \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad L\colon \begin{cases} x &= 0 \\ yu &= 0. \end{cases}$$

La curva L está formada por dos componentes irreducibles:

- la curva con ecuaciones $x = y = 0$, que es el divisor excepcional E del blow-up;
- la curva con ecuaciones $x = u = 0$, que es la transformada propia $\tilde{L}$ de L'.

Ambas componentes son curvas íntegras, por lo cual obtenemos la identidad

$$L = \tilde{L} + E.$$

La intersección esquemática $\tilde{L} \cap E$ es de dimensión cero, por lo que $\tilde{L} \cdot E = \operatorname{gr} \tilde{L} \cap E = 1$. Por otro lado, podemos deformar la recta L' a la recta L'' con ecuación $z = 0$, por ejemplo. Como $\pi^{-1}(L'') \cdot E = 0$ (¿por qué?) se sigue que $L \cdot E = 0$. Por la linealidad de la forma de intersección tenemos que

$$0 = L \cdot E = (\tilde{L} + E) \cdot E = \tilde{L} \cdot E + E^2,$$

por lo que concluimos que $E^2 = -1$.

Generalizamos el tipo de curvas negativas del Ejemplo 1.3 y definimos una clase de curvas que resultan ser de importancia fundamental en la clasificación de las superficies.

Definición 1.4. Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva. La curva C es una (-1)-curva si C es geométricamente irreducible y verifica las igualdades $C^2 = K_X \cdot C = -1$.

El divisor excepcional de $\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2_k$ es un ejemplo de una (-1)-curva. Lo único que falta por demostrar es la igualdad $K_{\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2_k} \cdot E = -1$. Dejamos esto como ejercicio; véase [Har77, V, 3.3].

Observación 1.5. En la definición de (-1)-curva asumimos solamente que la curva C es geométricamente irreducible, en lugar de geométricamente íntegra. La razón es que la igualdad $C^2 = -1$ implica que C no puede ser un múltiplo non-trivial de una curva: una (-1)-curva es automáticamente geométricamente íntegra.

El ejemplo siguiente demuestra algunas de los sutilezas que debemos tener en cuenta con respecto a los coeficientes en una equivalencia lineal.

Ejemplo 1.6. Sea $E \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la curva elíptica dada por la ecuación

$$y^2 z = x(x - z)(x + z).$$

1. La equivalencia lineal no respeta la positividad/negatividad de los coeficientes: el divisor **no** efectivo $[1, 0, 1] + [-1, 0, 1] - [0, 1, 0]$ de E es linealmente equivalente al divisor **efectivo** $[0, 0, 1]$.
2. La equivalencia lineal no necesariamente obedece una ley de cancelación.
   Los divisores $2[0, 0, 1]$ y $2[0, 1, 0]$ son linealmente equivalentes, aunque los divisores $[0, 0, 1]$ y $[0, 1, 0]$ **no** lo son.

El Punto (1) enseña que elegir un representante u otro de una clase de equivalencia lineal puede afectar nuestras expectativas de positividad/negatividad.

El Punto (2) es particularmente perturbante cuando el número 2 es invertible dentro de los coeficientes que usamos: usando combinaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$, las igualdades

$$[0,0,1] = \frac{1}{2} \cdot 2[0,0,1] \qquad \text{y} \qquad [0,1,0] = \frac{1}{2} \cdot 2[0,1,0]$$

nos enseñan que los $\mathbb{R}$-divisores $[0,0,1]$ y $[0,1,0]$ son $\mathbb{R}$-linealmente equivalentes sobre la curva E, aunque no son linealmente equivalentes.

Forma de intersección II: grados de fibrados lineales. La segunda definición explota la conexión entre divisores y fibrados lineales. Al ser la variedad de referencia X suave, los divisores de Weil y de Cartier coinciden; por lo tanto, cada divisor $D \in \operatorname{Div} X$ determina automáticamente un fibrado lineal, denotado $\mathscr{O}_X(D)$. Si $C \subset X$ es una curva íntegra, la restricción $\mathscr{O}_X(D)|_C$ es un fibrado lineal sobre C que denotamos por $\mathscr{O}_C(D)$. Definimos el producto de intersección $D \cdot C$ mediante la fórmula

$$D \cdot C := \operatorname{gr} \mathscr{O}_C(D).$$

Esta definición es mucho más compacta que la anterior y, por esta razón, puede resultar un poco inaccesible. Sin embargo, con un poco de práctica, resulta ser muy conveniente. Por ejemplo, si $D, D' \in \operatorname{Div} X$ son divisores linealmente equivalentes, deducimos automáticamente la igualdad

$$D \cdot C = D' \cdot C,$$

gracias a la cadena de igualdades

$$D \cdot C = \operatorname{gr} \mathscr{O}_C(D) = \operatorname{gr} \mathscr{O}_C(D') = D' \cdot C,$$

puesto que los divisores D, D' son linealmente equivalentes si y solamente si los fibrados lineales correspondientes son isomorfos (y, naturalmente, fibrados isomorfos tienen el mismo grado).

Sean X una superficie suave y C una curva sobre X. La segunda definición de la forma de intersección también nos da una interpretación geométrica para la auto-intersección

$$C^2 := C \cdot C = \operatorname{gr} \mathscr{O}_C(C).$$

Si $\mathscr{I}$ es el haz de ideales de C sobre X, entonces $\mathscr{O}_C(-C) \simeq \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ es el haz conormal de C en X [Har77, p. 182]. Su haz dual $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_C}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_C)$ es el haz normal $\mathscr{N}_{C/X}$ de C en X. En este caso $\mathscr{N}_{C/X}$ es un fibrado lineal, puesto que $\mathscr{N}_{C/X}$ es un haz localmente libre de rango igual a la codimensión de C en X. De ahí sigue la igualdad $C^2 = \operatorname{gr} \mathscr{N}_{C/X}$.

Ejemplo 1.7 (Una (-1)-curva, versión 2.0)**.** Sea $p \in \mathbb{P}^2_k$ el punto con coordenadas proyectivas $[0,0,1]$ y sea $X = \operatorname{Bl}_p \mathbb{P}^2_k$ el blow-up del plano proyectivo en p. Sea E la curva excepcional de X. Entonces $E^2 = \operatorname{gr} \mathscr{N}_{E/X}$, y en este caso $\mathscr{N}_{E/X} \simeq \mathscr{O}_E(-1)$ [Har77, II, 8.24(c)], por lo que $E^2 = -1$.

El siguiente lema indica por qué las dos definiciones de la forma de intersección coinciden.

Lema 1.8. *Sea X una variedad tuanis. Sean $D \subset X$ y $C \subset X$ un divisor íntegro y una curva íntegra, respectivamente, cuya intersección es de dimensión cero. Entonces*

$$\operatorname{gr} D \cap C = \operatorname{gr} \mathscr{O}_C(D).$$

Demostración. Tensorizando la sucesión exacta de hazes [Har77, II, 6.18]

$$0 \to \mathscr{O}_X(-D) \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_D \to 0$$

con el haz estructural $\mathscr{O}_C$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{O}_C(-D) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_{C\cap D} \to 0.$$

Concluimos que el haz $\mathscr{O}_C(D)$ es el fibrado lineal que corresponde al divisor $C \cap D$ adentro de la curva C. El grado de este divisor es el grado de la intersección esquemática $C \cap D$. □

Ejemplo 1.9 (Teorema de Bézout)**.** Sean ℓ y ℓ' dos rectas distintas del plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$. Como ℓ y ℓ' son linealmente equivalentes, se sigue la igualdad $\ell^2 = \ell \cdot \ell = \ell \cdot \ell' = 1$. Dadas curvas C y D con grados respectivos c y d, entonces valen las equivalencias lineales

$$C \sim c\ell \qquad \text{y} \qquad D \sim d\ell.$$

De ahí sigue la igualdad $C \cdot D = cd$. Si C y D no tienen componentes en común, entonces su intersección esquemática $C \cap D$ es de dimensión cero, de donde concluimos que $\operatorname{gr} C \cap D = cd$.

Ejercicio 1.10. Sea $\mathbb{P}^3_k$ el espacio proyectivo con coordenadas proyectivas w, x, y, z y sea $X \subset \mathbb{P}^3_k$ la cuádrica determinada por la ecuación $wy - xz = 0$. Sean

$$\ell\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad m\colon \begin{cases} w = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

dos rectas sobre X. Decimos que una curva C sobre X es de tipo $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ si $C \sim a\ell + bm$. Demuestre que si C y D son curvas sobre X de tipos respectivos (a, b) y (a', b'), entonces $C \cdot D = ab' + a'b$.

Ejemplo 1.11. Generalizando la Construcción 1.2, si X es una superficie y si $p \in X$ es un punto suave, entonces existen

- una superficie $\operatorname{Bl}_p X$,
- una curva $E \subset \operatorname{Bl}_p X$,
- un morfismo propio $\pi\colon \operatorname{Bl}_p X \to X$,

tales que

- la curva E es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$ y contenida en el abierto suave de $\operatorname{Bl}_p X$,
- el morfismo π induce un isomorfismo entre $\operatorname{Bl}_p X \setminus E$ y $X \setminus \{p\}$.

El morfismo $\pi\colon \operatorname{Bl}_p X \to X$ (y, talvez, simplemente la superficie $\operatorname{Bl}_p X$) se llama el blow-up de X en p, la curva E se llama el divisor excepcional y satisface $E^2 = -1$. Los detalles de esta generalización se pueden encontrar en [Har77, II, §7 p. 163 y V, 3.1].

1.1. El Criterio de Contractabilidad de Castelnuovo. Hemos aludido al hecho de que las (-1)-curvas juegan un papel importante en la clasificación de superficies. Ello se debe en gran parte al Criterio de Contractabilidad de Castelnuovo, el cual asevera que si X es un superficie tuanis y $C \subset X$ es una (-1)-curva, entonces existe un morfismo $\pi\colon X \to Y$ que contrae a la curva C, o sea, $\pi(C)$ es un punto. Aún más, y esta es la parte delicada[2] de la demostración, la superficie Y *también es suave*. En este sentido, el criterio de Castelnuovo es un converso al hecho de que el divisor excepcional del blow-up de una superficie tuanis en un punto es una (-1)-curva (Ejemplo 1.11).

Teorema 1.12 (Criterio de Contractabilidad de Castelnuovo)**.** *Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una (-1)-curva. Existe una superficie tuanis Y y un morfismo propio $\pi\colon X \to Y$ tal que*

- *π contrae la curva C a un punto $p \in Y$, y*
- *π es un isomorfismo entre $X \setminus C$ y $Y \setminus \{p\}$.*

Demostración. [Har77, V, 5.7]. □

2. El Teorema de Riemann–Roch

Sea X una variedad tuanis y sea $D \in \operatorname{Div} X$ un divisor. Frecuentemente estaremos interesado en saber si el divisor D es linealmente equivalente a un divisor efectivo. Aún más, puede que estamos interesados a calcular todos los divisores efectivos linealmente equivalentes a D. Estas preguntas se expresan equivalentemente en términos de secciones globales de haces. Sea $\mathscr{O}_X(D)$ el fibrado lineal asociado a D y sea $\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D))$ el espacio vectorial de las secciones globales de $\mathscr{O}_X(D)$. ¿Es el espacio vectorial $\Gamma(X, \mathscr{O}_X(D))$ nulo? ¿Cuál es su dimensión?

El Teorema de Riemann–Roch es una herramienta sumamente útil para atacar este problema. Más en general aún, sea $\mathscr{F}$ un fibrado vectorial sobre X. El espacio vectorial $\Gamma(X, \mathscr{F})$ es el grupo $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{F})$ de cohomología de hazes. Gracias a [Har77, II, 5.19], los espacios vectoriales de secciones globales $\Gamma(X, \mathscr{F})$ y, más en general, todos los grupos de cohomología $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$, son espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo base k de X. El Teorema de Riemann–Roch permite calcular de forma general la característica de Euler

$$\chi(X, \mathscr{F}) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim_k \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}).$$

Denotamos $\dim_k \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ por $h^i(X, \mathscr{F})$.

Intuitivamente, al aumentar del índice i, los grupos de cohomología $\dim_k \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ se vuelven menos concretos. Sin embargo, hay relaciones entre ellos que nos ayudan. En este contexto, el haz canónico de X es un fibrado lineal que juega el papel de haz dualizante en la

[2] La existencia del morfismo π es fácil: sea A es un divisor amplio de X, y sea $a = A \cdot C$; si $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande, podemos tomar por π el mapa racional inducido por el sistema lineal $|n(A + aC)|$.

dualidad de Serre: para todo haz localmente libre $\mathscr{F}$ sobre X, existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^{\dim X - i}(X, \mathscr{F}^\vee \otimes \omega_X)', \tag{2.1}$$

donde $\mathscr{F}^\vee$ denote el haz dual del haz $\mathscr{F}$. Véase, por ejemplo, [Har77, III, §7].

Ejercicio 2.1. Sea $X \subset \mathbb{P}^3_k$ una superficie tuanis de grado d en el espacio proyetivo sobre un cuerpo k. Demuestre que $K_X^2 = d(d-4)^2$.
[Recuerde que hay un isomorfismo $\omega_X \simeq \mathscr{O}_X(d-4)$ [Har77, II, 8.20.3].]

Ejercicio 2.2. Más en general, sea $X \subset \mathbb{P}^n_k$ una intersección completa suave de ipersuperficies de grados $d_1, \ldots, d_{n-2}$ y sea $C \subset X$ la intersección de X con una hipersuperficie general de grado d. Calcule C^2.

Observación 2.3. En el caso en que $d = -n - 1 + \sum_i d_i$, la curva C representa un divisor canónico y el Ejercicio 2.2 calcula la auto-intersección K_X^2.

Después de estos preliminarios, enunciamos del Teorema de Riemann–Roch para superficies tuanis y fibrados lineales sobre ellas. Sólo necesitaremos esta versión.

Teorema 2.4 (Riemann–Roch)**.** *Sea X una superficie tuanis sobre un cuerpo k. Para cada divisor $D \subset X$ vale la igualdad*

$$\chi(X, \mathscr{O}_X(D)) \;=\; \frac{1}{2} D \cdot (D - K_X) + \chi(X, \mathscr{O}_X).$$

Demostración. [Har77, V, 3.1] □

Sea X es una superficie tuanis, sea $D \in \operatorname{Div} X$ un divisor sobre X y sea $\mathscr{O}_X(D)$ el fibrado lineal associado a D. Denotamos por K_X un divisor canónico sobre X. La característica de Euler de $\mathscr{O}_X(D)$ es

$$h^0(X, \mathscr{O}_X(D)) - h^1(X, \mathscr{O}_X(D)) + h^2(X, \mathscr{O}_X(D)).$$

Como $h^1(X, \mathscr{O}_X(D)) \geq 0$, al ser la dimensión de un espacio vectorial, y como $h^2(X, \mathscr{O}_X(D)) = h^0(X, \mathscr{O}_X(K_X - D))$ gracias a la dualidad de Serre (2.1), el Teorema de Riemann–Roch nos da la cota inferior

$$\dim_k \Gamma(X, \mathscr{O}_X(D)) + \dim_k \Gamma(X, \mathscr{O}_X(K_X - D)) \;\geq\; \frac{1}{2} D \cdot (D - K_X) + \chi(X, \mathscr{O}_X).$$

Si dicha cota es positiva, por ejemplo, esto implica que por lo menos uno de los divisores D ó $K_X - D$ se puede representar por un divisor efectivo.

El Teorema 2.4 admite generalizaciones vastas: por ejemplo, si X es una variedad propia de dimensión cualquiera, y si $\mathscr{F}$ es un fibrado vectorial sobre X, el Teorema de (Hirzebruch–)Riemann–Roch expresa la característica de Euler $\chi(X, \mathscr{F})$ en términos de las classes de Chern de $\mathscr{F}$ y de la clase de Todd del fibrado tangente de X.

Ejemplo 2.5. Sea $\mathbb{P}^2_k$ el plano proyectivo; entonces $\omega_{\mathbb{P}^2_k} \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-3)$, por lo que si L denota la clase de una recta, tenemos que $K_{\mathbb{P}^2_k} = -3L$. Por otro lado, valen las igualdades

$$\mathrm{H}^1\left(\mathbb{P}^2_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}\right) = \mathrm{H}^2\left(\mathbb{P}^2_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}\right) = 0$$

(la segunda igualdad se puede verificar, por ejemplo, con la dualidad de Serre), así que $\chi\left(\mathbb{P}^2_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}\right) = 1$. Sea C una curva de grado d sobre $\mathbb{P}^2_k$, de tal modo que $C \sim dL$. El Teorema de Riemann–Roch en este caso implica que

$$\dim \Gamma\left(\mathbb{P}^2_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}(d)\right) = \frac{1}{2}d(d+3) + 1 = \binom{d+2}{2},$$

una fórmula que esperamos sea conocida: la dimensión de $\Gamma\left(\mathbb{P}^2_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}(d)\right)$ es el número de monomios distintos de grado d en tres variables.

Ejercicio 2.6. Sea C un divisor de tipo (a, b) sobre la cuádrica $X \subset \mathbb{P}^3_k$ del Ejercicio 1.10. Calcule $\chi(X, \mathscr{O}_X(C))$ utilizando el Teorema de Riemann–Roch.

El siguiente ejercicio es una aplicación sencilla del Teorema de Riemann–Roch, que a su vez da una tercera forma de definir la forma de intersección sobre una superficie.

Ejercicio 2.7. Sea X una superficie tuanis sobre un cuerpo k. Para dos divisores C y D de X cualesquiera, demuestre que

$$C \cdot D = \chi(X, \mathscr{O}_X) - \chi(X, \mathscr{O}_X(-C)) - \chi(X, \mathscr{O}_X(-D)) + \chi(X, \mathscr{O}_X(-C-D)).$$

2.1. Divisores nef. Los divisores nef son increíblemente importantes para la geometría algebraica. Surgen a partir de la observación que toda intersección negativa tiene una razón específica para su existencia, y explotan cuanto es posible las intersecciones no-negativas. El Lema 2.10 toma su inspiración de esta intuición. Veremos otra utilización de los divisores nef en el Lema 2.15.

Definición 2.8. Sea X una variedad tuanis y sea $N \in \operatorname{Div} X$ un divisor. El divisor N es nef si, para cada curva $C \subset X$ vale la desigualdad $N \cdot C \geq 0$.

Sea $N \in \operatorname{Div} X$ un divisor nef. Por definición, si $C \subset X$ es una curva, entonces vale la desigualdad $N \cdot C \geq 0$. A veces, utilizaremos la contraposición: si $C \in \operatorname{Cur} X$ es un vector y vale la desigualdad $N \cdot C < 0$, entonces el vector C no es una combinación lineal finita con coeficientes no-negativos de curvas íntegras. Más adelante daremos la definición de equivalencia numérica (ver la Sección 4.1) y veremos que C no es ni siquiera numéricamente equivalente a una tal combinación lineal no-negativa.

Ejercicio 2.9. Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva irreducible. Si vale la desigualdad $C^2 \geq 0$, entonces la curva C es un divisor nef.

Lema 2.10. *Sea X una variedad tuanis definida sobre un cuerpo k y sean $A \in \operatorname{Div} X$ un divisor amplio y $C \subset X$ una curva. Entonces, vale la desigualdad $A \cdot C > 0$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero tal que el divisor nA es muy amplio y sea $X \to \mathbb{P}^N_k$ la inmersión asociada al divisor nA. De las definiciones y de la hipótesis se sigue que la igualdad

$$\operatorname{gr} C = nA \cdot C$$

entre el grado de la imagen de C en $\mathbb{P}^N_k$ y la intersección $nA \cdot C$. Cómo el grado de una curva es strictamente positivo, el resultado sigue. □

A veces, utilizaremos la contraposición del Lema 2.10: si $A \in \operatorname{Div} X$ es un divisor amplio, $C \in \operatorname{Cur} X$ es un vector y si vale la desigualdad $A \cdot C \leq 0$, entonces el vector C no es una combinación lineal finita con coeficientes positivos de curvas íntegras. Más adelante daremos la definición de equivalencia numérica (ver la Sección 4.1) y este resultado implica que C no es ni siquiera numéricamente equivalente a una tal combinación lineal positiva.

Una consecuencia del Lema 2.10 es que un divisor amplio es nef.

Lema 2.11. *Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva efectiva. Si vale la desigualdad $C^2 > 0$, entonces dado cualquier divisor $C' \in \operatorname{Div} X$ existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que el divisor $nC - C'$ es efectivo.*

Demostración. Sea $d \in \mathbb{N}$ un entero y aplicamos el Teorema de Riemann–Roch al divisor $dC - C'$:

$$\begin{aligned}
\chi\left(X, \mathscr{O}_X(dC - C')\right) &= \frac{(dC - C')^2 - K_X \cdot (dC - C')}{2} + \chi(X, \mathscr{O}_X) \\
&= \frac{C^2}{2} d^2 - \left(C \cdot C' + \frac{K_X \cdot C}{2}\right) d + \frac{(C')^2 + K_X \cdot C'}{2} + \chi(X, \mathscr{O}_X) \\
&= \frac{C^2}{2} d^2 + \text{un polinomio en } d \text{ de grado a lo más } 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\chi\left(X, \mathscr{O}_X(dC - C')\right)$ es un polinomio en d de grado 2 y coeficiente principal positivo. Deducimos que, para todo d suficientemente grande, la cantidad $\chi\left(X, \mathscr{O}_X(dC - C')\right)$ es positiva.

Elegimos también un divisor amplio $A \in \operatorname{Div} X$ y calculamos

$$A \cdot (K_X - (dC - C')) = -A \cdot Cd + A \cdot (K_X + A \cdot C').$$

Por lo tanto, $A \cdot (K_X - (dC - C'))$ es un polinomio en d de grado 1 y coeficiente principal negativo. Deducimos que, para todo d suficientemente grande, la cantidad $A \cdot (K_X - (dC - C'))$ es negativa.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que las dos desigualdades

$$\chi\left(X, \mathscr{O}_X(nC - C')\right) > 0 \qquad \text{y} \qquad A \cdot (K_X - (nC - C')) < 0 \tag{2.2}$$

se cumplen. Utilizando la dualidad de Serre, la primera desigualdad en (2.2) implica que por los menos uno de los divisores $nC - C'$ y $K_X - (nC - C')$ es efectivo. La segunda desigualdad implica que el divisor $K_X - (nC - C')$ no es efectivo, porque tiene intersección negativa con el divisor amplio A. Concluimos que el divisor $nC - C'$ es efectivo. □

Observación 2.12. El Lema 2.11 se puede generalizar al caso en que C es un divisor *grande* ("big") en una variedad de dimensión cualquiera. La definición de divisor grande permite precisamente una demostración totalmente análoga a la que hemos dado.

Observación 2.13. Otra manera de generalizar el Lema 2.11 es de observar que la clave de su demostración es el signo del coeficiente principal de ciertos polinomios. Esta idea se puede desarrollar sistemáticamente y da lugar al Teorema de Riemann-Roch asintótico.

Lema 2.14. *Sea X una superficie tuanis. Si $D \in \operatorname{Div} X$ es un divisor nef, entonces vale la desigualdad $D^2 \geq 0$.*

Demostración. Seguimos aquí la demostración dada en [Rei97, Corollary D.2.3]. Sea H un divisor amplio sobre X. Empezamos definiendo la función

$$p(t) \;=\; (D+tH)^2 = D^2 + 2tD \cdot H + t^2H^2,$$

y notando que es un polinomio cuadrático en t. Observamos que valen las desigualdades

- $H^2 > 0$, porque H es amplio, y
- $D \cdot H \geq 0$, porque H admite un múltiplo efectivo.

Se sigue que, por cada $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, $p(t)$ es positivo.

Demostramos ahora que si $t \in \mathbb{R}$ verifica $t > 0$, entonces la desigualdad $p(t) > 0$ implica la desigualdad $p\left(\frac{t}{2}\right) > 0$.

Gracias a las desigualdades ya demostradas, vale la desigualdad $H \cdot (D + tH) > 0$ y, por lo tanto, aplicando el Lema 2.11 con $C = D + tH$ y $C' = 0$, un múltiplo suficientemente grande de $D + tH$ es efectivo. Como D es nef, se sigue la desigualdad $D \cdot (D + tH) \geq 0$ y entonces también la desigualdad

$$p\left(\frac{t}{2}\right) = D \cdot (D+tH) + \frac{t^2}{2}H^2 > 0,$$

como queríamos.

Para concluir, si $t \in \mathbb{R}$ es positivo y tal que $p(t) > 0$, deducimos que, por cada $n \in \mathbb{N}$, vale la desigualdad $p\left(\frac{t}{2^n}\right) > 0$. Pasando al límite por $n \mapsto \infty$, deducimos la desigualdad $p(0) = D^2 \geq 0$. ☐

Lema 2.15. *Sea X una superficie tuanis. Si K_X es nef y $\chi(X, \mathscr{O}_X) \geq 1$, entonces el divisor $2K_X$ es linealmente equivalente a un divisor efectivo.*

Demostración. Aplicamos el Teorema de Riemann–Roch al divisor $2K_X$ y utilizamos las desigualdades $\chi(X, \mathscr{O}_X) \geq 1$, por hipótesis, y $K_X^2 \geq 0$, porque K_X es nef (Lema 2.14):

$$\chi(X, \mathscr{O}_X(2K_X)) \;=\; K_X^2 + \chi(X, \mathscr{O}_X) \;\geq\; 1.$$

La dualidad de Serre nos da que $h^2(X, \mathscr{O}_X(2K_X)) = h^0(X, \mathscr{O}_X(-K_X))$, así que por los menos uno de $2K_X$ o $-K_X$ es un divisor efectivo. Si $2K_X$ es efectivo, hemos terminado.

Suponemos entonces que $-K_X$ es efectivo. Sea A un divisor muy amplio sobre X. Al ser $-K_X$ efectivo, deducimos la desigualdad $A \cdot (-K_X) \geq 0$. Al mismo tiempo, como K_X es nef y A es efectivo, también vale la desigualdad $K_X \cdot A \geq 0$. Deducimos que vale la igualdad $A \cdot K_X = 0$ y concluimos gracias al Lema 2.10. □

Ejercicio 2.16. Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva. Si, por cada componente irreducible $C' \subset C$, vale la desigualdad $C' \cdot C \geq 0$, entonces el divisor C es nef.

El siguiente ejercicio nos ayudará en la demostración del Lema 6.9.

Ejercicio 2.17. Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva conexa cuyos componentes irreducibles tienen cuadrado igual a -1. Demostrar que C es un divisor nef si y sólo si la curva C contiene más de un sólo componente irreducible.

3. La fórmula de adjunción

Sea C una curva proyectiva. El género aritmético de C es el entero

$$p_a(C) \;=\; 1 - \chi\left(C, \mathscr{O}_C\right) \;=\; 1 - h^0\left(C, \mathscr{O}_C\right) + h^1\left(C, \mathscr{O}_C\right).$$

El género aritmético no es necesariamente no-negativo, aúnque lo es en el caso de curvas geométricamente íntegras (o, más en general, si $h^0\left(C, \mathscr{O}_C\right) = 1$). Una propiedad importante del género aritmético que usaremos con frecuencia es que, si C es una curva geométricamente íntegra y el género aritmético $p_a(C)$ es nulo, entonces la curva C es geométricamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Lema 3.1. *Una curva proyectiva y geométricamente íntegra C es geométricamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$ si y sólo si su género aritmético es cero.* □

Calcular el género aritmético de una curva puede ser difícil. Sin embargo, en el contexto más común en este curso, la fórmula de adjunción proporciona una manera de calcularlo.

Sea $C \subset X$ una curva reducida contenida en una superficie tuanis X. La fórmula de adjunción afirma la igualdad

$$C^2 + C \cdot K_X = 2p_a(C) - 2. \tag{3.1}$$

Esta fórmula es una consequencia numérica del isomorfismo de hazes $\omega_C \simeq \omega_X \otimes \mathscr{O}_X(C) \otimes \mathscr{O}_C$ [Har77, II, 8.20]. Por un lado, gracias a la segunda definición de la forma de intersección, sabemos que $C \cdot (C + K_X) = \operatorname{gr}\left(\omega_X \otimes \mathscr{O}_X(C) \otimes \mathscr{O}_C\right)$. Por otro lado, para una curva reducida, tenemos que $\operatorname{gr} \omega_C = 2p_a(C) - 2$

Por ejemplo, la fórmula de adjunción aplicada a una (-1)-curva C implica que el género aritmético de C es cero. Deducimos que C es geométricamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Aún más, una (-1)-curva C es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$ *sobre el cuerpo* k. La razón es que el fibrado $\mathscr{O}_C(C)$ es un fibrado de grado impar (e igual a -1) sobre la curva C. Por lo tanto, una curva C es una (-1)-curva si y sólo si C es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$ y vale la igualdad $C^2 = -1$.

Lema 3.2. *Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva geométricamente íntegra. Si valen las desigualdades $C^2 < 0$ y $K_X \cdot C < 0$, entonces la curva C es una (-1)-curva.*

Demostración. La fórmula de adjunción (3.1) implica la igualdad $C^2+K_X\cdot C = -2+2p_a(C)$. Dado que la curva C es geométricamente íntegra, su género aritmético $p_a(C)$ es no-negativo. Deducimos que la única posibilidad es que la igualdades $C^2 = K_X \cdot C = -1$ sean verificadas, por lo que C es una (-1)-curva. □

Más adelante encontraremos una curva geométricamente íntegra C contenida en una superficie tuanis X que verifica las igualdades

$$C^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad K_X \cdot C = -2.$$

En este caso, el género aritmético de la curva C es cero, y por tanto la curva es geométricamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$, pero no es necesariamente isomorfa a $\mathbb{P}^1$ sobre el cuerpo k.

4. Divisores, curvas y conos

En esta sección definimos los espacios vectoriales reales $N^1(X)_\mathbb{R}$ y $N_1(X)_\mathbb{R}$ (de dimensión finita) y los conos $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset N_1(X)_\mathbb{R}$ y $\mathrm{Nef}\,(X) \subset N^1(X)_\mathbb{R}$ asociados a una variedad tuanis sobre k.

4.1. Equivalencia numérica. Los núcleos (izquierdo y derecho) de la forma de intersección con coefficientes reales sobre una variedad X tuanis son, por lo general, espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, como hemos mencionado ya, los cocientes respectivos de $\mathrm{Div}\,X$ y $\mathrm{Cur}\,X$ son finito-dimensionales. A continuación codificamos estos espacios.

Sea X una variedad tuanis, D un divisor de X. Decimos que D es numéricamente trivial, y escribimos $D \equiv 0$, si $D \cdot C = 0$ para toda curva C de X. Dos divisores D y D' de X son numéricamente equivalentes si $D \cdot C = D' \cdot C$ para toda curva C de X, en cuyo caso escribimos $D \equiv D'$. Denotamos por $N^1(X)_\mathbb{R}$ el cociente de $\mathrm{Div}\,X$ por la relación $\equiv$: $N^1(X)_\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real (que resulta tener dimensión finita).

Análogamente, si C es una curva de X, decimos que C es numéricamente trivial, y escribimos $C \equiv 0$, si $D \cdot C = 0$ para todo divisor D de X. Dos curvas C y C' de X son numéricamente equivalentes si $D \cdot C = D \cdot C'$ para todo divisor D de X, en cuyo caso escribimos $C \equiv C'$. Denotamos por $N_1(X)_\mathbb{R}$ el cociente de $\mathrm{Cur}\,X$ por la relación $\equiv$: $N_1(X)_\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real (que resulta tener dimensión finita).

La forma de intersección inducida

$$- \cdot - \colon N^1(X)_\mathbb{R} \times N_1(X)_\mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

es un emparejamiento no-degenerado, y por tanto los espacios vectoriales reales $N^1(X)_\mathbb{R}$ y $N_1(X)_\mathbb{R}$ son duales y tienen la misma dimensión. Esta dimensión común se llama el número de Picard de X, el cual denotamos $\rho(X)$.

A menudo identificaremos un divisor efectivo $D \subset X$ con el elemento que le corresponde en $\mathrm{Div}\,X$. Analogamente, identificaremos un divisor $E \in \mathrm{Div}\,X$ con su clase de equivalencia numérica $[E] \in N^1(X)_\mathbb{R}$. Así mismo, si $F \in N^1(X)_\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia numérica de divisores, hablaremos de F como de un “divisor”, identificando F con cualquiera de los divisores en Div X en la clase de equivalencia F. Por ejemplo, cuando decimos que "un divisor $F \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ es efectivo" queremos decir que existe un divisor efectivo $F' \subset X$ tal que la clase de equivalencia numérica de F' es F. Implícitamente, estaremos también verificando que lo que decimos es independiente del representante efectivo elegido. Queremos también destacar que la propiedad de ser efectivo **no** es una propiedad numérica (Ejemplo 1.6 (2)). Por lo tanto, cuando decimos que un divisor $F \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ "es" efectivo, tenemos que tener algo de cuidado: algunos representantes en la clase de equivalencia son efectivos, algunos no, y nosotros nos estamos comprometiendo a verificar la independencia del representante dentro de los representantes *efectivos*. Afortunadamente, esto resulta ser un proceso muy natural y la imprecisión en el lenguaje realmente simplifica los argumentos sin comprometer su fidelidad.

4.2. Interacciones con las extensiones de cuerpo. En esta sección fijamos una extensión de cuerpos $k' \supset k$. Añadiremos hipótesis a la extensión a lo largo de la sección.

Dado un esquema Y definido sobre k, denotamos por $Y_{k'}$ el cambio de base $Y_{k'} = Y \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k'$ de Y a $\operatorname{Spec} k'$.

Sea X una variedad sobre el cuerpo k. Si $C \subset X$ es una curva íntegra, la operación de cambio de base $C_{k'} \subset X_{k'}$ puede que produzca una curva que es reducible o no es reducida.

Ejercicio 4.1. Sea p un número primo y sea $k = \mathbb{F}_p(a)$ el cuerpo de la funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{F}_p$ en una variable a. Sea $C \subset \mathbb{P}^2_k$ la curva

$$C = \{[x, y, z] : ax^p + y^p = 0\}.$$

- La curva C es reducida e irreducible sobre el cuerpo k.
- Sea $k' \supset k$ la extensión $k' = \mathbb{F}_p\left(a^{\frac{1}{p}}\right)$ obtenida añadiendo la raíz p-ésima de a al cuerpo k. La curva $C \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k'$ no es reducida sobre el cuerpo k'.

Ejercicio 4.2. Sea $\mathbb{F}_2$ el cuerpo con dos elementos. Sea $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$ la curva

$$C = \left\{[x, y, z] : x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2 = 0\right\}.$$

- La curva C es reducida e irreducible sobre $\mathbb{F}_2$.
- Sea $\mathbb{F}_4 \supset \mathbb{F}_2$ la extensión de grado 2. La curva $C \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_2} \operatorname{Spec} \mathbb{F}_4$ es reducida y no es irreducible sobre $\mathbb{F}_4$.

Por otro lado, la extensión de escalares respeta la equivalence numérica: si C y $C' \subset \operatorname{Cur} X$, entonces $C \equiv C'$ si y solo si $C_{k'} \equiv C'_{k'}$. Deducimos que hay inclusiones

$$N_1(X)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow N_1\left(X_{k'}\right)_{\mathbb{R}} \qquad \text{y} \qquad N^1(X)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow N^1\left(X_{k'}\right)_{\mathbb{R}}. \tag{4.1}$$

En particular, el número de Picard de una variedad depende del cuerpo k: al extender el cuerpo, el número de Picard puede aumentar.

Supongamos ahora que la extensión $k' \supset k$ es normal. Sea $G = \operatorname{Aut}(k'/k)$ el grupo de Galois de la extensión $k' \supset k$. Las inclusiones (4.1) se factorizan a través de inyecciones

$$N_1(X)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow N_1\left(X_{k'}\right)^G_{\mathbb{R}} \qquad \text{y} \qquad N^1(X)_{\mathbb{R}} \hookrightarrow N^1\left(X_{k'}\right)^G_{\mathbb{R}}, \tag{4.2}$$

donde $N_1(X_{k'})^G_{\mathbb{R}} \subset N_1(X_{k'})_{\mathbb{R}}$ y $N^1(X_{k'})^G_{\mathbb{R}} \subset N^1(X_{k'})_{\mathbb{R}}$ son los subespacios vectoriales formado por los vectores G-invariantes.

Lema 4.3. *Las inclusiones* (4.2) *son isomorfismos.*

Demostración. Véase [Kol96, Proposition II.4.3]. □

Observación 4.4. Aúnque no asumimos que la extensión $k' \supset k$ es finita, es común poder reducirnos a esta situación: el grupo de Galois G actúa sobre los espacios vectoriales $N^1(X_{k'})_{\mathbb{R}}$ y $N_1(X_{k'})_{\mathbb{R}}$ con órbitas finitas. Se sigue que, si nuestro razonamiento sólo involucra un número finito de divisores o curvas, es probable que todo factorize a través de un cociente *finito* de G.

Notamos también que si $\sigma\colon \overline{k} \to \overline{k}$ es un k-automorfismo, entonces, por cada $D \in \operatorname{Div} \overline{X}$ y $C \in \operatorname{Cur} \overline{X}$, vale la igualdad

$$\sigma(D) \cdot \sigma(C) = D \cdot C.$$

Deducimos que σ también conserva la forma de intersección $N^1(X')_{\mathbb{R}} \times N_1(X')_{\mathbb{R}}$.

La demostración del lema siguiente es una sencilla consecuencia de la transitividad de la acción del grupo de Galois. Cómo no asumimos que el cuerpo k es perfecto y cómo utilizamos a menudo argumentos parecidos, aislamos este enunciado.

Lema 4.5. *Sea $C \subset X$ una curva íntegra y sea $D \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ un divisor. Si $C_1, C_2 \subset C_{k'}$ son componentes íntegros de $C_{k'}$, entonces vale la igualdad $D \cdot C_1 = D \cdot C_2$.*

Demostración. Cómo la curva C es íntegra, el grupo de Galois $G = \operatorname{Aut}(k'/k)$ actúa transitivamente sobre los componentes de $C_{k'}$. Sea $\sigma \in G$ un elemento tal que $\sigma(C_1) = C_2$. Deducimos las igualdades

$$D \cdot C_1 = \sigma(D) \cdot \sigma(C_1) = D \cdot C_2$$

porque D es definido sobre k y por lo tanto es invariante por σ. □

Los tres resultados siguientes son corolarios del método de razonamiento que hemos introducido. Los enunciamos explícitamente para dar un poco de práctica con estos conceptos y, sobretodo, porque forman parte de la demostración del Lema 6.9.

Corolario 4.6. *Sea X una superficie tuanis sobre k y sea $C \subset X$ una curva íntegra.*

1. *Si vale la desigualdad $K_X \cdot C < 0$, entonces cada componente $C' \subset C$ geométricamente irreducible de C verifica la desigualdad $K_X \cdot C' < 0$.*
2. *Si vale la desigualdad $C^2 < 0$, entonces cada componente $C' \subset C$ geométricamente irreducible de C verifica la desigualdad $C'^2 < 0$.*

Demostración. Sea $k' \supset k$ una extensión normal finita de k tal que los componentes íntegros de C sobre k' son los componentes geométricos íntegros de C. Los dos resultados siguen aplicando el Lema 4.5 y utilizando, en el segundo caso, que si la intersección de una curva irreducible con un divisor efectivo es negativo, entonces la curva tiene cuadrado negativo. □

Corolario 4.7. *Sea X una superficie tuanis sobre k y sea $C \subset X$ una curva íntegra con $C^2 < 0$. Si los componentes geométricos de C tienen cuadrado -1 entonces los componentes geométricos de C son disjuntos.*

Demostración. Sea $k' \supset k$ una extensión normal finita de k tal que los componentes íntegros de C sobre k' son los componentes geométricos íntegros de C.

Por contradicción, supongamos que hay dos componentes irreducibles C_1, C_2 de C' con intersección positiva. Obtenemos que al menos uno de los componentes conexos de C' contiene al menos dos componentes irreducibles y llamamos D uno de estos componentes conexos. El Ejercicio 2.17 demuestra que D es un divisor nef, y, por lo tanto, vale la desigualdad $D^2 \geq 0$. Hemos llegado a una contradicción, porque habíamos demostrado que cada componente conexo de C' tiene cuadrado negativo. $\square$

Corolario 4.8. *Sea X una superficie tuanis definida sobre k y sea $C \subset X$ una curva íntegra cuyos componentes geométricos integrales son (-1)-curvas disjuntas dos a dos. Existe un morfismo $X \to Y$ a una superficie tuanis Y, definida sobre k que contrae exactamente los componentes geométricos de C.*

Demostración. Sea $k' \supset k$ una extensión normal finita de k tal que los componentes íntegros de C sobre k' son geométricamente íntegros. Sea $G = \operatorname{Aut}(k'/k)$ el grupo de Galois de la extensión $k' \supset k$ y sea $[k' : k]_i$ el grado inseparable de la extensión $k' \supset k$. Denotamos con X' y C' los cambios de base respectivos $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k'$ y $C \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k'$: se sigue que C' es una curva sobre k' cuyas componentes integrales son geométricamente integrales. Observamos que el grupo G actúa transitivamente sobre los componentes integrales de C'.

Gracias al Criterio de Contractabilidad de Castelnuovo, aplicado sucesivamente a cada uno de los componentes irreducibles de C, sabemos que existe una superficie tuanis Y' sobre k' y un morfismo $\pi' \colon X' \to Y'$ sobre k' que contrae exactamente los componentes de C'. Sea $A_{Y'} \subset X'$ un divisor integral cuyo morfismo asociado factoriza por el morfismo $\pi' \colon X' \to Y'$. Sea $A' \in \operatorname{Div} X'$ el divisor

$$A' = [k' : k]_i \sum_{\sigma \in G} \sigma(A_{Y'}).$$

El divisor A' es la norma del divisor $A_{Y'}$ con respecto a la extensión $k' \supset k$, por lo que el divisor A' corresponde a un divisor A de $\operatorname{Div} X$. Verificamos que un múltiplo suficientemente grande del divisor A define un morfismo $X \to Y$, cuya imagen es una superficie suave y que contrae a la curva C. Para ello, observamos que el divisor A es definido sobre k, y que las demás propiedades las podemos verificar después de pasar a una extensión cualquiera de k: utilizaremos la extensión $k' \supset k$.

Sobre la extensión k', el divisor A es la suma (con multiplicidad) de los divisores en la órbita por G de $A_{Y'}$. Cada uno de estos divisores define un morfismo que contrae los componentes de C' a una superficie suave, así que su suma también tiene la misma propiedad. Esto termina la demostración. $\square$

4.3. Conos. Los espacios vectoriales $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ y $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ contienen cada uno un cono de gran importancia para el estudio de la geometría de X.

Dentro del espacio vectorial $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ tenemos el cono convexo

$$\mathrm{NE}(X) := \{[C] \in N_1(X)_{\mathbb{R}} \colon C \text{ es una suma de curvas íntegras con coeficientes} \geq 0\},$$

y su clausura

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) := \text{clausura de } \mathrm{NE}(X) \text{ en } N_1(X)_{\mathbb{R}},$$

conocida como el cono cerrado de las curvas de X.

Dentro del espacio vectorial $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ tenemos el cono convexo

$$\mathrm{Nef}\,(X) = \left(\overline{\mathrm{NE}}(X)\right)^* \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$$

dual del cono cerrado de las curvas y conocido como el cono nef de X.

Utilizando la notación del Lema 4.3, notamos que además valen las igualdades

$$\mathrm{Nef}\,(X) = \mathrm{Nef}\,(X') \cap N^1(X)_{\mathbb{R}} \qquad \text{y} \qquad \overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}\,(X') \cap N_1(X)_{\mathbb{R}}.$$

Ya hemos definido los divisores nef en la Definición 2.8. La propiedad de ser nef es una propiedad numérica: un divisor numéricamente equivalente a un divisor nef es nef. El conjunto de las clases de equivalencia de divisores nef coincide con el cono $\mathrm{Nef}\,(X)$.

También la amplitud de un divisor es una propiedad numérica: un divisor numéricamente equivalente a un divisor amplio es amplio. Además, el conjunto de los divisores amplios forma un cono en $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ que coincide con el interior del cono $\mathrm{Nef}\,(X)$. No vamos a necesitar esta última propiedad.

La siguiente proposición es una aplicación sencilla de las definiciones. Sin embargo, es una herramienta muy útil para comprender la interacción entre geometría algebraica y geometría convexa.

Proposición 4.9. *Sea X una variedad tuanis, sea $\mathcal{C} \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ un cono extremal y sea $C \subset X$ una curva tal que $[C] \in \mathcal{C}$. Si $C' \subset X$ es una curva cuyo soporte está contenido en C, entonces C' pertenece al cono $\mathcal{C}$.*

Demostración. Si la curva C' es vacía (o sea, representa $0 \in \mathrm{Cur}\,X$), el resultado está claro. Supongamos entonces que C' no es vacía. Sea $m \in \mathbb{N}$ la máxima multiplicidad de un componente irreducible de C'. Por definición de m, la multiplicidad en $mC - C'$ de cada curva irreducible de X es no-negativa y todas éstas multiplicidades son nulas para curvas que no están contenidas en C. Deducimos que la combinación $mC - C' \in \mathrm{Cur}\,X$ representa una curva efectiva. Al ser ambas curvas C' y $mC - C'$ efectivas, la identidad $C' + (mC - C') = mC$ enseña que, por definición de cono extremal, la curva C' (y también $mC - C'$) está contenida en $\mathcal{C}$. $\square$

La Proposición 4.9 implica, en particular, que cada componente irreducible de una curva que genera un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ es también un generador del mismo rayo extremal.

Los rayos extremales del cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ son los protagonistas del Teorema del Cono 5.2 y son a la base del Programa de Modelos Minimales.

4.4. Ejemplos. A continuación damos una serie de ejemplos para ayudar a entender los conos que hemos introducido y las relaciones entre ellos.

Empezamos con tres ejemplos que no hacen referencia a una variedad en especial, pero son bastante representativos de lo que puede suceder en el cono cerrado de las curvas de una variedad, y de cómo la clausura puede manifestarse.

Ejemplo 4.10. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ el cono real generado por el conjunto de vectores

$$\{(1, n) \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Este cono no es cerrado: el vector $(0, 1)$ pertenece a la clausura de $\mathcal{C}$ y **no** pertenece a $\mathcal{C}$. La clausura de $\mathcal{C}$ es el cono $\overline{\mathcal{C}}$ generado por $(1, 0)$ y $(0, 1)$ – el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.11. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ el cono generado por el conjunto de vectores

$$\{(\lfloor 10^n \pi \rfloor, 10^n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Este cono no es cerrado: el vector $(\pi, 1)$ pertenece a la clausura de $\mathcal{C}$ y **no** pertenece a $\mathcal{C}$. La clausura de $\mathcal{C}$ es el cono $\overline{\mathcal{C}}$ generado por $(1, 1)$ y $(\pi, 1)$ – el cono no puede ser generado por vectores con coordenadas enteras.

Ejemplo 4.12. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ el cono "redondo"

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Este cono es cerrado y no es finitamente generado.

Observamos que una sóla variedad X puede presentar una mezcla de las características de los ejemplos anteriores (y más).

Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural y sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un cono cerrado. Queremos destacar una diferencia importante:

- si $n \leq 2$, entonces $\mathcal{C}$ es finitamente generado (por dos vectores como mucho);
- si $n \geq 3$, entonces $\mathcal{C}$ es no es necesariamente finitamente generado.

Pasamos ahora a dar ejemplos de cálculos de conos en superficies concretas.

Ejemplo 4.13. El espacio vectorial $N_1(\mathbb{P}^2_k)_\mathbb{R}$ tiene dimensión 1. Si $C \subset \mathbb{P}^2_k$ denota una curva cualquiera, entonces $\overline{\mathrm{NE}}(\mathbb{P}^2_k) = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$.

Ejemplo 4.14. Sea $p \in \mathbb{P}^2_k$ un punto en el plano proyectivo y $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2_k$, dotado con la proyección $\pi \colon X \to \mathbb{P}^2_k$ el blow-up de $\mathbb{P}^2_k$ en p. Sea $L' \subset \mathbb{P}^2_k$ una recta, y pongamos $L = \pi^{-1}(L')$. Denotamos por $E \subset X$ la curva excepcional. En este caso, $N_1(X)_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$, y $\{L, E\}$ forman una base de este espacio. La transformada total de una recta L'_p en $\mathbb{P}^2$ que pasa por p es linealmente (y por lo tanto numéricamente) equivalente a L en $N_1(X)_\mathbb{R}$, puesto que dos rectas cualesquiera de $\mathbb{P}^2_k$ son numéricamente equivalentes. Por ende, la transformada estricta de L'_p tiene la misma clase que $L - E$ en $N_1(X)_\mathbb{R}$. Dicha transformada es visiblemente un divisor effectivo, por lo que concluimos que $[L - E] \in \mathrm{NE}(X)$.
Moraleja: una expressión con coeficientes negativos, como $L - E$, bien puede pertenecer a una clase efectiva sobre X.

Antes de seguir con el ejemplo anterior, recordamos que, si X es una superficie, los espacios vectoriales $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ y $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ coinciden. En el ejemplo siguiente, nos enfocaremos en calcular el cono $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}$. Para ello, nos resultará cómodo utilizar la dualidad entre $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ y $N_1(X)_{\mathbb{R}}$: determinaremos al mismo tiempo el cono $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}$ y su dual $\left(\overline{\mathrm{NE}}(X)\right)^* = \mathrm{Nef}\,(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$, el cono nef de X.

Ejemplo 4.15. Continuando con el ejemplo anterior, determinamos el cono

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}.$$

de la superficie $X = \mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^2_k$. Sea

$$\mathcal{C} \quad = \quad \mathbb{R}_{\geq 0}\text{-span}\,\{E, L-E\} \quad = \quad \mathbb{R}_{\geq 0}\,E + \mathbb{R}_{\geq 0}\,(L-E)$$

el cono en $N_1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ generado por $E, L-E$. Mostramos aquí que $\mathcal{C}$ coincide con el cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. La inclusión $\mathcal{C} \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ vale porque los generadores del cono $\mathcal{C}$ son curvas efectivas. Demostramos la inclusión opuesta con los pasos siguientes.

1. *El cono dual $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ es el cono generado por $L, L-E$.*
   El espacio vectorial real $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ admite $\{E, L\}$ como base. Buscamos los divisores $aE+bL$ tales que, por cada $C \in \mathcal{C}$, la desigualdad $(aE+bL)\cdot C \geq 0$ sea verificada. Cómo el cono $\mathcal{C}$ es generado por las curvas E y $L-E$, es suficiente que sean verificadas las desigualdades
   $$\left\{\begin{array}{lll} (aE+bL)\,\cdot\,E & \geq & 0 \\ (aE+bL)\,\cdot\,(L-E) & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rll} -a & \geq & 0 \\ b+a & \geq & 0. \end{array}\right.$$
   Un pequeño cálculo muestra que L y $L-E$ generan $\mathcal{C}^* \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$.
2. *El cono $\mathcal{C}^* \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$ está contenido en el cono $\mathcal{C} \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}$.*
   NB: aquí identificamos el espacio $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ de los divisores con el espacio $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ de las curvas.
   Es suficiente verificar que los generadores L y $L-E$ del cono dual se pueden expresar como combinaciones lineales no-negativas de los generadores de $\mathcal{C}$. Esto sigue de las igualdades
   $$L = 1\cdot E + 1\cdot(L-E) \qquad \text{y} \qquad L-E = 0\cdot E + 1\cdot(L-E).$$
3. *Finalmente demostramos la inclusión restante $\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset \mathcal{C}$.*
   Si D es una curva efectiva sobre X, podemos escribir $D = M+F$, con $F = aE+b(L-E)$ para algunos $a, b \geq 0$ y tal que el soporte de M no contiene las curvas E o $L-E$. De ahí siguen las desigualdades $M\cdot E \geq 0$ y $M\cdot(L-E) \geq 0$, y deducimos que $M \in \mathcal{C}^*$. Obtenemos que D es la suma del elemento F del cono $\mathcal{C}$ y del elemento M del cono $\mathcal{C}^*$. Al ser el cono $\mathcal{C}^*$ contenido en el cono $\mathcal{C}$, concluimos que D yace en el cono $\mathcal{C}$.

Cómo consecuencia de la técnica usada en el Ejemplo 4.15 para calcular el cono $\overline{\mathrm{NE}}\,(\mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^2_k)$, obtenemos también que el cono nef de $\mathrm{Bl}_p\,\mathbb{P}^2_k$ es generado por los divisores L y $L-E$.

La técnica utilizada en el Ejemplo 4.15 es una de las técnicas estándar para calcular el cono cerrado de las curvas de una superficie. Así como la hemos presentado nosotros, da un criterio para verificar que un cono *ya conocido* es el cono cerrado de curvas. ¿Qué sucede si el cono candidato resulta no ser el cono cerrado de curvas? El punto clave en este caso es intentar determinar el cono cerrado de curvas y el cono nef *simultáneamente*, de forma iterativa, a partir de dos conos candidatos. Este proceso es un poco más estable, y puede guiarnos a encontrar curvas efectivas/divisores nef que desconocíamos al principio del proceso.

Ejercicio 4.16. Sean p y q dos puntos distintos en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$ y sea $X = \mathrm{Bl}_{p,q}\,\mathbb{P}^2_k$, dotado con la proyección $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2_k$. Sea $L' \subset \mathbb{P}^2_k$ una recta cualquiera, y pongamos $L = \pi^{-1}(L')$. Denotamos por E y F en X los divisores excepcionales respectivamente correspondientes a los puntos p y q. Utilice las ideas del Ejemplo 4.15 para demostrar que las curvas $E, F, L - E - F$ generan el cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Determine el cono nef $\mathrm{Nef}(X)$ de X.

4.5. El grupo de Picard. Sea X una variedad tuanis. En un curso introductorio de geometría algebraica y, sobretodo en el contexto de curvas, se acostumbra ver la definición de equivalencia lineal y una construcción del grupo de Picard. La definición de equivalencia numérica y la construcción de los espacios vectoriales $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ y $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ aparecen posteriormente (¡si aparecen del todo!). Por esta razón, queremos esbozar aquí la relación entre las clases de equivalencia numérica de divisores $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ y el grupo de Picard $\mathrm{Pic}\, X$.

Una construcción estandar del grupo de Picard empieza por el grupo abeliano libre $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\, X$ generado por los divisores íntegros de X. Ya aquí hay una diferencia con la construcción de $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ donde, al admitir coefficientes reales, nos permitimos en particular dividir por cualquier entero no nulo. Luego, se divide el grupo $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}\, X$ por la equivalencia lineal, obteniendo el grupo de Picard $\mathrm{Pic}\, X$. En general, divisores racionalmente equivalentes son automáticamente numéricamente equivalentes: esto nos permite considerar las clases de equivalencia racional como una etapa intermedia entre los divisores y las clases de equivalencia numérica. Dividiendo $\mathrm{Pic}\, X$ por la equivalencia numérica, obtenemos un grupo abeliano *libre* y *finitamente generado*, generalmente denotado por $\mathrm{Num}\, X$. El espacio vectorial $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ se identifica con el producto tensorial $N^1(X)_{\mathbb{R}} \simeq \mathrm{Num}\, X \otimes \mathbb{R}$.

En el caso de curvas tuanis C, el grupo $\mathrm{Pic}\, C$ es isomorfo a $\mathrm{Jac}\, C \times \mathbb{Z}$, donde $\mathrm{Jac}\, C$ es una variedad abeliana de dimensión igual al género de C, mientras el grupo $\mathrm{Num}\, C$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, los grupos $\mathrm{Pic}\, C$ y $\mathrm{Num}\, C$ son diferentes ya en el caso de curvas de género mayor de 0.

Al aumentar de la dimensión de X, las diferencias entre $\mathrm{Pic}\, X$ y $\mathrm{Num}\, X$ se vuelven más pronunciadas.

Finalmente, vale destacar que para las superficies racionales, los dos grupos $\mathrm{Pic}\, X$ y $\mathrm{Num}\, X$ coinciden.

5. Teorema del Cono

Dada una variedad tuanis X sobre k, sea $S \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}$ un subconjunto y $D \in N^1(X)_{\mathbb{R}}$ un divisor. Denotamos por $S_{D\geq 0} \subset N_1(X)_{\mathbb{R}}$ el subconjunto

$$S_{D\geq 0} = \{C \in S :\ D \cdot C \geq 0\}\,.$$

Definimos, de manera totalmente análoga, los subconjuntos $S_{D>0}$, $S_{D\leq 0}$ y $S_{D<0}$. Casi siempre utilizaremos esta notación en el caso en que $S = \overline{\mathrm{NE}}(X)$ y $D = K_X$. Además, y esto subraya una particularidad de la dicotomía inherente al programa de modelos minimales, los dos conos que aparecen con más frecuencia son $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X\geq 0}$ y su cono complementario $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$.

Definición 5.1. Un cono $\mathcal{C} \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ es contráctil si existen una variedad Y y un morfismo $\pi_{\mathcal{C}}\colon X \to Y$ tal que la imagen de una curva $C \subset X$ a través de $\pi_{\mathcal{C}}$ es un punto si y sólo si la curva C pertenece al cono $\mathcal{C}$. Llamaremos contracción de $\mathcal{C}$ a cualquiera de los morfismos $\pi_{\mathcal{C}}$ con las propiedades anteriores y también a la variedad $\pi_{\mathcal{C}}(X)$ imagen de X a través de $\pi_{\mathcal{C}}$.

Observamos que la definición de contráctil conlleva de forma implícita una variedad Y y un morfismo $\pi\colon X \to Y$. Reemplazando Y por la imagen de π podemos asumir que Y es propia y geométricamente irreducible. Sin embargo, para el carácter inductivo del programa de modelos minimales, es útil que la dimensión de Y pueda ser menor que la dimensión de X. De hecho, en los mejores de los casos, el programa de modelos minimales de una variedad X produce una succesión de contracciones a partir de X que termina con una contracción a *un punto*.

Teorema 5.2 (Teorema del Cono de Mori)**.** *Sea X una variedad tuanis sobre un cuerpo k. Existe una familia numerable de curvas íntegras $\{R_i\}_{i\in I}$ tal que vale la igualdad*

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X\geq 0} + \sum_{i\in I} \mathbb{R}_{\geq 0}[R_i].$$

Los rayos $\{\mathbb{R}_{\geq 0}[R_i]\}$ sólo acumulan en el hiperplano $K_X^{\perp}$. Además, por cada $i \in I$,

1. *el rayo $\mathbb{R}_{\geq 0}[R_i]$ es extremal;*
2. *si $C \subset R_i$ es un componente geométricamente íntegro de R_i, valen las desigualdades $0 < -K_X \cdot C \leq \dim X + 1$.*

Demostración. Véase [Kol96, III.1.3] y [Mor82, Chapter 2, §3]. Para el caso en que X es una superficie tuanis sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, véase [Deb01, Theorem 6.1 y Exercise 6.7.1] ó [Mat02, Theorem 1-3-1]. $\square$

Si R es un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenido en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$ y vale la desigualdad $R^2 < 0$, veremos que los componentes geométricos íntegros de R son (-1)-curvas disjuntas dos a dos.

Pasamos a continuación a verificar que los conos efectivos que calculamos en los Ejemplos 4.13 y 4.15, y en el Ejercicio 4.16 concuerdan con el Teorema del Cono.

Ejemplo 5.3. Sea $\mathbb{P}^2_k$ es el plano proyectivo sobre un cuerpo k, y sea $L \subset \mathbb{P}^2_k$ una recta cualquiera. Por un lado, $-3L \in N^1\left(\mathbb{P}^2_k\right)_{\mathbb{R}}$ es un divisor canónico. Por otro lado, gracias al Ejemplo 4.13, ya sabemos que $\overline{\mathrm{NE}}\left(\mathbb{P}^2_k\right) = \mathbb{R}_{\geq 0}[L]$. En este caso $\overline{\mathrm{NE}}\left(\mathbb{P}^2_k\right)_{K_{\mathbb{P}^2_k}\geq 0} = \{0\}$, y como $(-3L)\cdot L = -3$, se cumplen las desigualdades

$$0 < -K_{\mathbb{P}^2_k} \cdot L \leq 3$$

predichas por el Teorema del Cono.

Ejemplo 5.4. Sea $p \in \mathbb{P}^2_k$ un punto sobre el plano proyectivo y pongamos $X = \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2_k$. Si L es la transformada total de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ y E es el divisor excepcional del blow-up, entonces $K_X = -3L+E$ es un divisor canónico de X [Har77, V, 3.3]. Gracias al Ejemplo 4.15, sabemos ya que

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E] + \mathbb{R}_{\geq 0}[L-E]$$

De ahí sigue la igualdad $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geq 0} = \{0\}$. Nótese que

- los rayos extremales $\mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}[L-E]$ se pueden generar usando curvas irreducibles (en el caso de $L-E$ usamos la transformada propia de una recta sobre $\mathbb{P}^2$ que pasa por p);
- E es una (-1)-curva, y en particular $K_X \cdot E = -1$;
- $L-E$ es representado por una curva racional de auto-intersección 0 con $K_X \cdot (L-E) = -2$.

Ejercicio 5.5. Sean p y q dos puntos distintos en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$ y sea $X = \mathrm{Bl}_{p,q} \mathbb{P}^2_k$. Verifique que el cono cerrado de curvas $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ concuerda con el Teorema del Cono (ver también el Ejercicio 4.16).

6. Rayos extremales de superficies

En esta sección denotaremos por X una superficie tuanis definida sobre un cuerpo k cualquiera. Analizaremos las posibles contracciones asociadas a los rayos extremales R del cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ según la tricotomía $R^2 > 0$, $R^2 = 0$ o $R^2 < 0$.

Antes de empezar con los tres casos, recordamos que una variedad tuanis con divisor canónico nef se llama un modelo minimal y que una variedad tuanis con divisor canónico anti-amplio se llama una variedad de Fano. Una superficie de Fano es una superficie de del Pezzo. Observamos que una variedad que es al mismo tiempo un modelo minimal y una variedad de Fano tiene dimensión cero.

El lema siguiente nos ayudará a simplificar la presentación.

Lema 6.1. *Sea X una variedad tuanis definida sobre k con número de Picard sobre k igual a 1. La variedad X es un modelo minimal o es una variedad de Fano.*

Demostración. Como el número de Picard de X es 1 y la variedad X es proyectiva, cada divisor de X definido sobre el cuerpo base k es un múltiplo de un divisor amplio. Por lo tanto, cada divisor sobre X es amplio, cero o el opuesto de un divisor amplio. Obtenemos la dicotomía aplicando este razonamiento al divisor canónico. Por un lado, si K_X es un múltiplo no-negativo de un divisor amplio de X, entonces el divisor K_X es nef y la variedad X es un modelo minimal. Por otro lado, si K_X es un múltiplo negativo de un divisor amplio de X, entonces el divisor $-K_X$ es amplio y la variedad X es una variedad de Fano. ☐

6.1. Rayos extremales con cuadrado positivo.

Lema 6.2. *Sea X una superficie tuanis y sea $C \subset X$ una curva correspondiente a un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Si vale la desigualdad $C^2 > 0$, entonces el número de Picard de la superficie X sobre el cuerpo k es igual a 1.*

Demostración. Empezamos por demostrar que el cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ se reduce al rayo generado por C. Sea $C' \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$ un elemento cualquiera. Por el Lema 2.11 sabemos que existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que el divisor $nC - C'$ es efectivo. Deducimos que la suma $C' + (nC - C') = nC$ pertenece al rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ generado por C. Por definición de rayo extremal se sigue que C' mismo pertence al rayo extremal generado por C, cómo queríamos.

Dado que el espacio vectorial $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ es generado por los elementos de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, concluimos que $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ tiene dimensión 1, como era deseado. □

Lema 6.3. *Sea X una superficie tuanis sobre un cuerpo k y sea $\sigma\colon \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow X$ un mapa racional dominante y separable. Existe un divisor efectivo y nef $C \subset X$ que verifica la desigualdad $K_X \cdot C < 0$.*

Demostración. Aplicamos la "elimination of indeterminacies" [Stacks, Tag 0C5H] al mapa σ. Obtenemos una superficie $\mathbb{P}$ con un morfismo $\pi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}^2_k$ que es una sucesión de blow-ups, y un morfismo racional dominante y separable $\sigma'\colon \mathbb{P} \to X$, tales que el mapa σ' se factoriza por σ a través de π:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ \mathbb{P}^2_k \arrow[rr, dashed, "\sigma"] & & X. \end{tikzcd}$$

Sea $\ell \subset \mathbb{P}^2_k$ una recta y sea $L = \pi^{-1}(\ell) \subset \mathbb{P}$ la transformada total de ℓ. La curva es un divisor nef y vale la cadena de igualdades

$$L \cdot K_{\mathbb{P}} = \ell \cdot \pi_* K_{\mathbb{P}} = \ell \cdot K_{\mathbb{P}^2_k} = -3,$$

donde hemos usado la fórmula de proyección [Har77, V, 3.2(d)] y la identidad $\pi_* K_{\mathbb{P}} = K_{\mathbb{P}^2_k}$, que sigue de una cuenta explícita para un blow-up y, entonces, para una sucesión de blow-ups. Observamos ahora que vale la relación

$$K_{\mathbb{P}} \simeq \sigma'^* K_X + R,$$

donde $R \subset \mathbb{P}$ es el divisor (efectivo) de ramificación del morfismo σ' (ver [Vak17, Exercise 21.7.A]). Sea $C = \sigma'_* L$ y calculamos

$$K_X \cdot C \;=\; K_X \cdot \sigma'_* L \;=\; \sigma'^* K_X \cdot L \;=\; K_{\mathbb{P}} \cdot L - R \cdot L \;\leq\; -3,$$

donde la última desigualdad es una consecuencia de que el divisor L es nef y el divisor R es efectivo. Finalmente, el divisor C es efectivo y nef, porque L lo es. □

Utilizaremos el Lema 6.3 exclusivamente cuando X es una superficie racional y el morfismo π es biracional. Un superficie que verifica las hipótesis del Lema 6.3 se llama separablemente uniracional. Resulta que una superficie separablemente uniracional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es también racional.

Corolario 6.4. *Si X una superficie racional tuanis sobre un cuerpo k, entonces el divisor canónico de X no es nef.*

Demostración. El resultado sigue del Lema 6.3: el divisor canónico interseca por lo menos una curva efectiva negativamente. □

Corolario 6.5. *Sea X una superficie racional tuanis. Si $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ admite un rayo extremal generado por una curva de cuadrado positivo, entonces X es una superficie de del Pezzo.*

Demostración. El Lema 6.2 implica que el número de Picard de la superficie X es 1. El Corolario 6.4 implica que X no es un modelo minimal; el resultado se sigue del Lema 6.1. □

Lema 6.6. *Sea X una superficie racional tuanis definida sobre un cuerpo k. Los grupos de cohomología $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X)$ y $\mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X)$ son nulos.*

Demostración. En cada uno de los dos casos, podemos asumir que el cuerpo k es algebraicamente cerrado (véase [Stacks, Lemma 02KH]).

Por la dualidad de Serre, la dimensión del espacio vectorial $\mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X)$ es igual a la dimensión del espacio vectorial $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(K_X))$. El divisor K_X no es ni siquiera numéricamente equivalente a un divisor efectivo, porque el Lema 6.3 implica que K_X tiene intersección negativa con un divisor nef.

Primero, vemos que $h^1(X, \mathscr{O}_X)$ es un invariante biracional. El género aritmético

$$p_a(X) \ := \ \chi(X, \mathscr{O}_X) - 1 \ = \ h^0(X, \mathscr{O}_X) - h^1(X, \mathscr{O}_X) + h^2(X, \mathscr{O}_X) - 1$$

de una superficie tuanis sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es un invariante biracional [Har77, V, 5.6]. Como la superficie X es proyectiva y geométricamente íntegra, sabemos que $h^0(X, \mathscr{O}_X) = 1$ y ya hemos visto que $h^2(X, \mathscr{O}_X) = 0$, así que $p_a(X) = h^1(X, \mathscr{O}_X)$.

Segundo, utilizando la invariancia biracional, nos reducimos al caso en que $X = \mathbb{P}^2_k$. Finalmente, caso sabemos que vale la igualdad $h^1\left(\mathbb{P}^2_k, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}\right) = 0$ por [Har77, III, 5.1(b)], y hemos terminado. □

También el grupo $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)$ es nulo. Por la demostración nos reducimos al caso en que el cuerpo k es algebraicamente cerrado y usamos [Har77, §II, Exercise 8.8].

Lema 6.7. *Sea C una curva tuanis sobre k. Si $\pi\colon \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow C$ es un mapa dominante, entonces el género aritmético de C es nulo.*

Demostración. Podemos calcular el género aritmético sobre una extension de k y, por lo tanto, asumimos que el cuerpo k es infinito. Esto implica que los puntos k-racionales de $\mathbb{P}^2_k$ son densos. Sea $U \subset \mathbb{P}^2_k$ un abierto no vacío sobre el cual el mapa π es definido. Sean $p, q \in U$ dos puntos con imágenes distinctas $\pi(p)$ y $\pi(q)$ a través del mapa π (para esto usamos que los puntos racionales de $\mathbb{P}^2_k$ son densos). Sea $\ell \subset \mathbb{P}^2_k$ la recta entre p y q. Por construcción, la restricción $\pi|_\ell\colon \ell \dashrightarrow C$ es un mapa dominante. Ya que ℓ es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$ su género aritmético es nulo y se sigue el género aritmético de C también es nulo. □

6.2. Rayos extremales con cuadrado nulo.

Lema 6.8. *Sea X una superficie tuanis con $\chi(X, \mathscr{O}_X) \geq 1$ y sea $D \subset X$ una curva íntegra. Si $D^2 = 0$ y $K_X \cdot D < 0$, entonces el mapa racional asociado al divisor D se factoriza por* *un morfismo $X \to C$, donde C es una curva suave proyectiva y la fibra general es una curva geométricamente racional.*

Demostración. Calculamos una cota inferior para $\chi\left(X, \mathscr{O}_X(D)\right)$. Empezamos utilizando el Teorema de Riemann–Roch y las hipótesis:

$$\chi\left(X, \mathscr{O}_X(D)\right) \;=\; \frac{D^2 - K_X \cdot D}{2} + \chi(X, \mathscr{O}_X) \;=\; -\frac{K_X \cdot D}{2} + \chi(X, \mathscr{O}_X) \;>\; 1.$$

Al ser la característica de Euler un entero, deducimos la desigualdad

$$\chi\left(X, \mathscr{O}_X(D)\right) \;\geq\; 2.$$

Además, demostramos que el espacio vectorial $\mathrm{H}^2\left(X, \mathscr{O}_X(D)\right)$ es nulo. Utilizando la dualidad de Serre, es suficiente demostrar que el divisor $K_X - D$ no es efectivo. Observamos que el divisor D es nef, porque es irreducible y su cuadrado es no-negativo (de hecho, nulo, ver Ejercicio 2.16). Como el producto $D \cdot (K_X - D) = D \cdot K_X < 0$ es negativo, obtenemos que el divisor $K_X - D$ no es efectivo.

Combinando lo que hemos visto, deducimos que el espacio vectorial $\mathrm{H}^0\left(X, \mathscr{O}_X(D)\right)$ tiene dimensión por los menos 2, así que la dimensión de la imagen del mapa racional $\varphi\colon X \dashrightarrow |D|'$ es por los menos uno. Siendo el divisor D irreducible y de cuadrado D^2 nulo, deducimos que, dados dos divisores D_1, D_2 cualquiera en el sistema lineal $|D|$, los divisores D_1 y D_2 son disjuntos o coinciden. De ahí que el mapa racional φ asociado al sistema lineal $|D|$ no tiene puntos bases, o sea, es un morfismo, y sus fibras son los divisores del sistema lineal $|D|$. En particular, las fibras de φ son curvas y la imagen de φ también es una curva.

El morfismo φ todavía no es el morfismo del enunciado del lema, aunque no está muy lejos de serlo. Sean $\varphi'\colon X \to C'$ y $\pi\colon C' \to \operatorname{im}\varphi$ los morfismos que aparecen en la factorización de Stein (ver [Stacks, Tag 03H0]) de φ: el morfismo φ se factoriza como $\varphi = \pi \circ \varphi'$ y las fibras de φ' son geométricamente conexas.

Demostramos ahora que, sobre una clausura algebraica $\overline{k}$ de k, el morfismo φ' admite fibras cuya reducción es isomorfa a $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$.

Sea F una fibra geométricamente reducible de φ'. Al valer la desigualdad $K_X \cdot F < 0$, deducimos que existe un componente geométrico integral de F con intersección negativa con K_X: sea $E \subset F$ un tal componente. Al ser la intersección $F \cdot E = 0$ nula y al ser F geométricamente conexa y reducible, se sigue que la auto-intersección E^2 es negativa. Por lo tanto valen las desigualdades $K_X \cdot E$ y $E^2 < 0$ y la curva E es una (-1)-curva, cómo queríamos. Deducimos que la curva E es el divisor excepcional de un blow-up $X \to X_1$ y que podemos factorizar el morfismo φ' por este blow-up. Observamos que el número de Picard de X_1 es estrictamente menor que el número de Picard de X. Por lo tanto, después de un número finito de estos pasos, obtenemos que todas las fibras restantes son geométricamente irreducibles. Sea G la reducción de una de estas fibras; la curva G verifica $G^2 = 0$ y $K_X \cdot G < 0$ y deducimos que su género aritmético es nulo, cómo queríamos.

El morfismo φ' admite entonces fibras geométricas que son irreducibles y cuya reducción es isomorfa a $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. Falta por demostrar que la fibra general de φ' es geométricamente reducida. Esto es [Kol96, Exercise III.2.1.8]. $\square$

6.3. Rayos extremales con cuadrado negativo.

Lema 6.9. *Sea X una superficie tuanis y sea $R \in \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$ un rayo extremal del cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, generado por una curva íntegra C. Si vale la desigualdad $C^2 < 0$ entonces el rayo R es contráctil y la contracción es una superficie suave.*

Demostración. Demostramos el resultado en tres pasos:

1. los componentes geométricos íntegros de C son (-1)-curvas;
2. los componentes geométricos de C son dos a dos disjuntos;
3. los componentes geométricos de C se pueden contraer a una superficie suave sobre el cuerpo k.

Paso 1: los componentes geométricos íntegros de C son (-1)-curvas.
El Corolario 4.6 implica que las dos desigualdades $C^2 < 0$ y $K_X \cdot C < 0$ satisfechas por C también están satisfechas por cada componente geométricamente íntegro de C. El Lema 3.2 concluye este paso.

Paso 2: los componentes geométricos de C son dos a dos disjuntos.
El Paso 1 implica que cada componente geométricamente íntegro de C tiene cuadrado -1 y entonces el resultado sigue del Corolario 4.7.

Paso 3: los componentes geométricos de C se pueden contraer a una superficie suave sobre el cuerpo k.
Gracias a los Pasos 1 y 2, podemos aplicar el Corolario 4.8 y concluir. $\square$

7. El Teorema de Iskovskikh-Manin

Teorema (Iskovskikh-Manin)**.** *Sea X una superficie racional, suave, proyectiva y geométricamente íntegra definida sobre un cuerpo k cualquiera. Existe una superficie suave, proyectiva y geométricamente íntegra Y definida sobre k y un morfismo biracional $\pi\colon X \to Y$ tal que la superficie Y es*

- *una superficie de del Pezzo, o*
- *una fibración en cónicas sobre una cónica.*

Demostración. Como X es racional, el Corolario 6.4 implica que X no es un modelo minimal, y entonces existen rayos extremales de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenidos en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$: sea R un tal rayo extremal. La Proposición 4.9 permite asumir que el rayo R es generado por una curva íntegra D.

Si el cuadrado D^2 es positivo, el resultado sigue del Corolario 6.5.

Si el cuadrado D^2 es nulo, el resultado sigue del Lema 6.8 que existe un morfismo $\pi\colon X \to C$, donde C es una curva tuanis y π es una fibración en cónicas. Falta por demonstrar que C

es una cónica, o sea, que el género aritmético de C es nulo. Para ello, nos reducimos al caso en el que el cuerpo k es algebraicamente cerrado. Como X es racional, existe un mapa racional $\rho\colon \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow X$ dominante. Concluimos aplicando el Lema 6.7 al mapa $\pi \circ \rho$.

Finalmente, si el cuadrado D^2 es negativo, utilizamos el Lema 6.9 para contraer el rayo R mediante un morfismo $\pi_R\colon X \to Y$ donde la contracción Y es una superficie suave. Nótese que en este caso, obtenemos $\rho(Y) < \rho(X)$, y la superficie Y es tuanis y racional. Al ser Y una superficie racional, podemos repetir los pasos anteriores. Este proceso debe terminar, puesto que el número de Picard de una superficie tuanis es positivo. □

8. Cuerpo algebraicamente cerrado

En los siguientes resultados, asumiremos que el cuerpo base k es algebraicamente cerrado.

Teorema 8.1. *Sea X una superficie tuanis definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Si el divisor anti-canónico de X es amplio y el número de Picard de X es 1, entonces la superficie X es isomorfa a $\mathbb{P}^2_k$.*

Demostración. [Kol96, Theorem 3.7] □

Lema 8.2. *Sea X una superficie tuanis definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y sea $C \subset X$ una curva íntegra correspondiente a un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenido en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$. Si vale la desigualdad $C^2 > 0$, entonces la superficie X es isomorfa a $\mathbb{P}^2_k$.*

Demostración. Gracias al Lema 6.2, sabemos que el número de Picard de X es 1, así que los divisores C y K_X son proporcionales. Las desigualdades $C^2 > 0$ y $K_X \cdot C < 0$ implican que $-K_X$ pertenece al rayo generado por C. Deducimos que $-K_X$ es amplio y concluimos utilizando el Teorema 8.1. □

Lema 8.3. *Sea X una superficie tuanis definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y sea $D \subset X$ una curva íntegra correspondiente a un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenido en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$. Si vale la igualdad $D^2 = 0$, entonces la superficie X es una superficie reglada sobre una curva tuanis.*

Demostración. Aplicamos el Lema 6.8 al divisor D, obteniendo un morfismo $\varphi\colon X \to C$, donde C es una curva tuanis.

Falta por demonstrar que las fibras de φ son irreducibles. Por contradicción, asumimos que F es una fibra reducible de φ. Al ser la intersección $K_X \cdot F < 0$ negativa, existe un componente íntegro de F con intersección negativa con K_X: sea E un tal componente y escribimos $F = eE + F'$, con $e \in \mathbb{N}$ y F' una curva efectiva que no contiene E. Observamos que, al ser F un generador de un rayo extremal, las curvas E y F' también generan, cada una, el mismo rayo. Además, el producto $E \cdot F'$ es positivo, porque F es conexa. Sin embargo, el cuadrado F^2 es proporcional al producto $E \cdot F$ y es nulo, porque todas las fibras de π son linealmente equivalentes y fibras distinctas son disjuntas. Esta contradicción nos permite concluir que cada fibra de π es irreducible, como queríamos. □

Corolario 8.4. *Sea X una superficie racional tuanis definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y sea $D \subset X$ una curva íntegra correspondiente a un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenido en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$. Si vale la igualdad $D^2 = 0$, entonces la superficie X es una superficie reglada sobre $\mathbb{P}^1_k$.*

Demostración. Aplicamos el Lema 8.3 al divisor D y obtenemos que X es una superficie reglada sobre una curva tuanis C. Sólo nos queda por demonstrar que C es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$. Como k es algebraicamente cerrado, es suficiente demonstrar que el género aritmético de C es cero y esto sigue del Lema 6.7 y a la hipótesis que X es racional. □

Teorema 8.5. *Sea X es una superficie racional tuanis definida sobre el cuerpo algebraicamente cerrado k. Existe una sucesión finita de contracciones de (-1)-curvas $\pi\colon X \to Y$ y la superficie Y es isomorfa a $\mathbb{P}^2_k$ o a una superficie de Hirzebruch.*

Demostración. Sea $C \subset X$ una curva íntegra que genera un rayo extremal del cono $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenido en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$: tales curvas existen gracias al Teorema del Cono (Teorema 5.2).

Si el cuadrado de C es no-negativo, entonces el Lema 8.2 y el Corolario 8.4 implican que el número de Picard de X

- es 1 y X es isomorfa a $\mathbb{P}^2_k$, o
- es 2 y X es una superficie de Hirzebruch.

Si el cuadrado de C es negativo, entonces se sigue que C es una (-1)-curva, la cual podemos contraer gracias al Criterio de Contractabilidad de Castelnuovo (Teorema 1.12). Contrayendo C obtenemos una superficie racional tuanis X' con número de Picard estrictamente inferior al número de Picard de X. A la superficie X' podemos aplicar el mismo razonamiento y obtener, de tal forma, una sucesión de contracciones de (-1)-curvas $X \to X' \to \cdots$. Esta sucesión termina necesariamente, porque el número de Picard es no-negativo y decrece monotónicamente en las contracciones. La última superficie en la cadena de contracciones que hemos determinado es una superificie racional tuanis que no contiene (-1)-curvas. Por lo visto, una tal superficie isomorfa a $\mathbb{P}^2_k$ o a una superficie de Hirzebruch. □

El Teorema 8.6 que sigue termina el programa de modelos minimales para superficies tuanis definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y no necesariamente racionales.

Teorema 8.6. *Sea X una superficie tuanis sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Existe una sucesión finita $X \to X' \to \cdots \to Y$ de contracciones de (-1)-curvas tales que vale una de las posibilidades siguientes:*

1. *Y es un modelo minimal;*
2. *Y es una fibración en $\mathbb{P}^1_k$ sobre una curva tuanis; o*
3. *Y es isomorfa a $\mathbb{P}^2_k$.*

Demostración. Si el divisor canónico de X es nef, entonces X es un modelo minimal y el resultado está claro.

Suponemos entonces que el divisor canónico de X no es nef. Se sigue del Teorema del Cono que existe una curva íntegra $C \subset X$ que genera un rayo extremal de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenido en $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$.

Suponemos primero que vale la desigualdad $C^2 < 0$. Usando la fórmula de adjunción, deducimos las igualdades $C^2 = K_X \cdot C = -1$. Entonces, C es una (-1)-curva y la podemos contraer. Con cada contracción, el número de Picard de la superficie disminuye. Deducimos que, después de un número finito de contracciones, llegamos a una superficie maja Y que no contiene (-1)-curvas.

Si vale la igualdad $C^2 = 0$, entonces el resultado sigue del Lema 8.3.

Finalmente, si vale la desigualdad $C^2 > 0$, entonces podemos aplicar el Lema 8.2 y concluimos que la superficie X es isomorfa a $\mathbb{P}^2$. □

Apéndice A. Conos

Sea V un espacio vectorial real. En la mayoría de las aplicaciones, el espacio V es un espacio vectorial de dimensión finita. Denotamos con V' el espacio vectorial dual de V: el espacio de todas las formas lineales $\ell\colon V \to \mathbb{R}$.

Definición A.1. Un cono $\mathcal{C}$ en V es un subconjunto de V tal que para todo x, $y \in \mathcal{C}$ y λ, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, tenemos que $\lambda x + \mu y \in \mathcal{C}$.

Si $S \subset V$ es un conjunto de vectores en el espacio V, el conjunto de las combinaciones lineales non-negativas de los vectores de S es un cono. Para nuestras aplicaciones, observamos que, dado un cono $\mathcal{C} \subset V$, la clausura de este cono $\overline{\mathcal{C}}$ es también un cono.

Definición A.2. Sea $\mathcal{C} \subset V$ un cono. El cono dual $\mathcal{C}^* \subset V'$, contenido en el espacio vectorial dual V' de V, es el conjunto

$$\mathcal{C}^* = \{y \in V' \mid y(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{C}\}.$$

Si $S \subset V'$ es un conjunto de formas lineales sobre un espacio vectorial real V, el conjunto

$$\{v \in V \mid \forall s \in S,\ s(v) \geq 0\} \subset V$$

es un cono en V.

Definición A.3. Sea $\mathcal{C} \subset V$ un cono. Un subcono $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ es un cono extremal de $\mathcal{C}$, si, dados dos elementos cualesquiera $a, b \in \mathcal{C}$ con la propiedad $a + b \in \mathcal{C}'$, entonces a y b son ambos elementos de $\mathcal{C}'$.

Ejercicio A.4. Sean $\mathcal{C} \subset V$ un cono y $\ell\colon V \to \mathbb{R}$ una forma lineal sobre V. Asumamos que por cada $v \in \mathcal{C}$, vale la desigualdad $\ell(v) \geq 0$. Verifique que el subconjunto $\{v \in \mathcal{C} \mid \ell(v) = 0\}$ es un cono extremal de $\mathcal{C}$.

Recordamos que un rayo en un espacio vectorial real V es el cono generado por los múltiplos no-negativos de un único vector no-nulo. La siguiente definición simplemente combina la definición de cono extremal y la definición de rayo. La destacamos, porque es un concepto clave que se usa muy a menudo en la geometría biracional.

Definición A.5. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un cono. Un rayo extremal de $\mathcal{C}$ es un subcono extremal de $\mathcal{C}$ generado por un único elemento non-nulo.

Referencias

[Bǎd01] Lucian Bǎdescu, *Algebraic surfaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001. Translated from the 1981 Romanian original by Vladimir Maşek and revised by the author. ↑(document)

[Bea96] A. Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. ↑(document)

[Deb01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001. ↑(document), 5

[Cil20] C. Ciliberto, *Classification of complex algebraic surfaces*, EMS Series of Lectures in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2020. ↑(document)

[EGAI] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4** (1960), 228 (French). ↑(document)

[EGAII] ———, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **8** (1961), 222 (French). ↑

[EGAIII-1] ———, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **11** (1961), 167. ↑

[EGAIII-2] ———, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **17** (1963), 91 (French). ↑

[EGAIV-1] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **20** (1964), 259 (French). ↑

[EGAIV-2] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **24** (1965), 231 (French). ↑

[EGAIV-3] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **28** (1966), 255. ↑

[EGAIV-4] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967), 361 (French). ↑(document)

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. ↑(document), 1, 1, 1.7, 1, 1.11, 1.1, 2, 2, 2.1, 2, 3, 5.4, 6.1, 6.1

[Has09] B. Hassett, *Rational surfaces over nonclosed fields*, Arithmetic geometry, Clay Math. Proc., vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 155–209. ↑(document)

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996. ↑(document), 4.2, 5, 6.2, 8

[Laz04a] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals. ↑(document)

[Laz04b] ———, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series. ↑(document)

[Man86] Yu. I. Manin, *Cubic forms*, 2nd ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Algebra, geometry, arithmetic; Translated from the Russian by M. Hazewinkel. ↑

[Mat02] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. ↑(document), 5

[Mor82] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 1, 133–176. ↑(document), 5

[Poo17] B. Poonen, *Rational points on varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 186, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. ↑1

[Rei97] M. Reid, *Chapters on algebraic surfaces*, Complex algebraic geometry (Park City, UT, 1993), IAS/Park City Math. Ser., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 3–159. ↑2.1

[Stacks] The Stacks project authors, *The Stacks Project, stacks.math.columbia.edu*, 2021. ↑(document), 6.1, 6.1, 6.2

[Vak17] R. Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry, Online version*, 2017. ↑6.1

[VA13] A. Várilly-Alvarado, *Arithmetic of del Pezzo surfaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons Symp., Springer, Cham, 2013, pp. 293–319. ↑(document)

Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL, UK

Email address: `adomani@gmail.com, d.testa@warwick.ac.uk`

Department of Mathematics MS 136, Rice University, 6100 S. Main St., Houston, TX 77005, USA

Email address: `av15@rice.edu`

URL: `http://math.rice.edu/~av15`